

投資の主観的成功・失敗確率

中 川 裕 司

はじめに

1. 収益率の定義と分布
2. n 期間期待収益率とリスク
3. 数 値 例
4. 3 時点間の期待収益率とリスクの関係
5. 投資の成功確率

おわりに

補 論 A

はじめに

投資家が将来の 2 時点（近い将来と遠い将来）の価格予想に基づいて現在投資を行い、近い将来に実際に正の収益を得られた場合には取引を終了するが、予想に反して正の収益が得られなかった場合には、そのままのポジションを保持して遠い将来で投資を終了する 2 時点の投資の意思決定問題を考察する¹⁾。そのとき、投資家が予想する近い将来の資産価格は 1 期先のものとは限定しない²⁾。

その際、投資家は現在の資産価格を観測して、近い将来 (m 期後) の資産価格を複数個予想し、その価格毎の主観的確率を与え、1 期間あたりの資産の収益率が正規分布 (ガウス分布) に従うことを仮定して、現時点で投資を行い m 期後に正の収益を得るかどうかの事前確率を導出し、数値例を示す。その過程で、まず m 期間期待収益率と m 期間収益率の分散を求め、求

めた期待収益率と収益率の分散に対応する正規分布の平均と分散を導出して、 m 期後に取引を終了する投資の成功確率を求める。ここで、成功確率とは投資家が期待収益率に関わりなく、正の収益を獲得できる事前確率を意味する。

つぎに、投資家の予想に反して m 期後に正の収益が得られなかった場合、そのままのポジションを保持して遠い将来 (n 期後) で投資を終了して正の収益を得る事前確率を考察する。その際、 n 期後の資産の複数の予想価格とそれらに対応する主観的確率を現時点で与えておくことにする³⁾。

次節では、まず本稿で使用する 1 期間収益率と n 期間収益率を定義し、1 期間収益率が正規分布に従う場合の収益率と資産価格の関係を示し、2 節では n 期間収益率と資産価格の関係を求める。3 節では 2 節で考察した収益率と価格の関係を数値例で示し、 m 期後の投資の成功確率を求める。4 節では m 期間期待収益率と n 期間期待収益率と各々の収益率の分散から $m+1$ 期から n 期までの期待収益率と分散の関係を導出する。最後の 5 節では m 期後に投資が成功しなかった場合に、 n 期後に投資が成功する、あるいは失敗する確率のシミュレーションを行う。

1. 収益率の定義と分布

時点 $t+s$ の資産価格 \tilde{P}_{t+s} と時点 $t+s-1$ の資産価格 \tilde{P}_{t+s-1} の関係を (1.1) 式のように想定して、(1.1) 式が成立する収益率 \tilde{r}_{t+s} を時点 $t+s$ の 1 期間期待収益率あるいは 1 期間収益率と定義する⁴⁾。

$$\tilde{P}_{t+s} = \tilde{P}_{t+s-1} \exp(\tilde{r}_{t+s}) \quad (s = 1, 2, \dots, n) \quad (1.1)$$

ここで、 $\tilde{P}_{t+s} \geq 0$ であり、 $\tilde{P}_{t+s} = 0$ のときは時点 $t+s$ で債務不履行になることを表しているものと想定する。時点 $s=n$ のときの収益率 r_{t+n} に (1.1) 式

を再帰的代入すると、(1.2)式となる。

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{t+n} &= \tilde{P}_{t+n-1} \exp(\tilde{r}_{t+s}) = P_t \exp\left(\sum_{s=1}^n \tilde{r}_{t+s}\right) \\ &= P_t \exp(\tilde{\rho}_{t+1,t+n}) = P_t \exp(n\tilde{R}_{t+1,t+n})\end{aligned}\quad (1.2)$$

ここで、時点 t （現時点）の価格 P_t は既知であるとし、(1.2)式の $\tilde{R}_{t+1,t+n}$ を現時点 $t+1$ から n 期先までの収益率の平均（以下では、 n 期間平均収益率とよぶ）と定義して、(1.2)式の $\tilde{\rho}_{t+1,t+n}$ は時点 $t+1$ から n 期先までの収益率（以下では、 n 期間収益率とよぶ）を表す。過去の資産価格の集合 $\Omega_t = \{P_t, P_{t-1}, \dots\}$ を条件として、(1.2)式の両辺の時点 t での条件付期待値をとって、両辺を P_t で割ると(1.3)式となる。

$$E\left[\frac{\tilde{P}_{t+n}}{P_t} \mid \Omega_t\right] = E\left[\exp(\tilde{\rho}_{t+1,t+n}) \mid \Omega_t\right] \quad (1.3)$$

ここで、 $E[\cdot \mid \Omega_t]$ は Ω_t を条件とした時点 t での期待値を表す。また、(1.2)式より、 $\tilde{R}_{t+1,t+n}$ について解くと(1.4)式となる。

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{t+1,t+n} &\equiv \frac{\tilde{\rho}_{t+1,t+n}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n \tilde{r}_{t+s} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n (\ln \tilde{P}_{t+s} - \ln \tilde{P}_{t+s-1}) = \frac{\ln \tilde{P}_{t+n} - \ln P_t}{n}\end{aligned}\quad (1.4)$$

また、投資家が n 時点での状態 k ($< \infty$) の資産価格 $P_{k,t+n}$ を予想し、その価格毎に対応する投資家の主観的確率 $\omega_{k,t+n}$ を与えると、(1.3)式は(1.5a)式と表現でき、価格比の分散は(1.5b)式となる。

$$E\left[\frac{\tilde{P}_{t+n}}{P_t} \mid \Omega_t\right] = \sum_{i=1}^k \omega_{i,t+n} P_{i,t+n} / P_t \quad (1.5a)$$

$$\text{Var}\left(\frac{\tilde{P}_{t+n}}{P_t} \mid \Omega_t\right) = \sum_{i=1}^k \omega_{i,t+n} \left(P_{i,t+n} / P_t - E\left[\frac{\tilde{P}_{t+n}}{P_t} \mid \Omega_t\right]\right)^2 \quad (1.5b)$$

つぎに、(1.5a)式の両辺の対数をとると(1.6)式となる。

$$\ln E\left[\tilde{P}_{t+n} \mid \Omega_t\right] - \ln P_t = \ln \left(\sum_{i=1}^k \omega_{i,t+n} P_{i,t+n} / P_t \right) \quad (1.6)$$

任意の n に関して、 Ω_t を条件とした $\tilde{R}_{t+1,t+n}$ が(1.7)式のように平均 $\mu_{t+1,t+n}$ と分散 $\sigma_{t+1,t+n}^2$ の正規分布に従うと仮定する⁵⁾。

$$\tilde{R}_{t+1,t+n} \mid \Omega_t \sim N\left(\mu_{t+1,t+n}, \sigma_{t+1,t+n}^2\right) \quad (1.7)$$

ここで、 N (平均, 分散) は正規分布関数を表す。(1.7)式より, 平均 $\mu_{t+1,t+n}$ と分散 $\sigma_{t+1,t+n}^2$ の正規分布の積率母関数を参考にして, $\exp(\tilde{R}_{t+1,t+n})$ の期待収益率 $\mu_{t+1,t+n}$ と分散 $\sigma_{t+1,t+n}^2$ は(1.8)式となる。

$$E\left[\exp(\tilde{R}_{t+1,t+n}) \mid \Omega_t\right] = \exp\left(\mu_{t+1,t+n} + \sigma_{t+1,t+n}^2/2\right) \quad (1.8a)$$

$$Var\left(\exp(\tilde{R}_{t+1,t+n}) \mid \Omega_t\right) = \exp\left(2\mu_{t+1,t+n} + \sigma_{t+1,t+n}^2\right) \left\{ \exp\left(\sigma_{t+1,t+n}^2\right) - 1 \right\} \quad (1.8b)$$

2. n 期間期待収益率とリスク

(1.5)式より, n 期間収益率の分布は(2.1)式に従う。

$$\tilde{p}_{t+1,t+n} \mid \Omega_t \sim N\left(n\mu_{t+1,t+n}, n^2\sigma_{t+1,t+n}^2\right) \quad (2.1)$$

(2.1)式より, 平均 $n\mu_{t+1,t+n}$ と分散 $n^2\sigma_{t+1,t+n}^2$ の正規分布の積率母関数を参考にして, $\tilde{P}_{t+n}/P_t \mid \Omega_t$ の期待収益率と分散は(2.2)式となる。

$$E\left[\tilde{P}_{t+n} \mid \Omega_t\right] / P_t = \exp\left(n\mu_{t+1,t+n} + n^2\sigma_{t+1,t+n}^2/2\right) \quad (2.2a)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\frac{\tilde{P}_{t+n}}{P_t} \middle| \Omega_t\right) &= \exp\left(2n\mu_{t+1,t+n} + n^2\sigma_{t+1,t+n}^2\right) \left\{ \exp\left(n^2\sigma_{t+1,t+n}^2\right) - 1 \right\} \\ &= \left(E\left[\frac{\tilde{P}_{t+n}}{P_t} \middle| \Omega_t\right] \right)^2 \left\{ \exp\left(n^2\sigma_{t+1,t+n}^2\right) - 1 \right\} \end{aligned} \quad (2.2b)$$

(2.2)式から、 $\mu_{t+1,t+n}$ と $\sigma_{t+1,t+n}^2$ を P_t と \tilde{P}_{t+n} で表現するために、まず(2.2b)式から $n\sigma_{t+1,t+n}^2$ を求めると(2.3)式となる。

$$n^2\sigma_{t+1,t+n}^2 = \ln \left\{ 1 + \text{Var}\left(\frac{\tilde{P}_{t+n}}{P_t} \middle| \Omega_t\right) \middle/ \left(E\left[\frac{\tilde{P}_{t+n}}{P_t} \middle| \Omega_t\right] \right)^2 \right\} \quad (2.3)$$

(2.3)式を(2.2a)式に代入して、 $n\mu_{t+1,t+n}$ を求めると、(2.4)式となる。

$$\begin{aligned} n\mu_{t+1,t+n} &= \ln E\left[\frac{\tilde{P}_{t+n}}{P_t} \middle| \Omega_t\right] - \ln P_t - n^2\sigma_{t+1,t+n}^2/2 \\ &= \ln \left\{ E\left[\frac{\tilde{P}_{t+n}}{P_t} \middle| \Omega_t\right]^2 \middle/ \sqrt{E\left[\left(\frac{\tilde{P}_{t+n}}{P_t}\right)^2 \middle| \Omega_t\right]} \right\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

ここで、(2.3)式と(2.4)式は n 期間期待収益率と n 期間収益率の分散からそれに対応する(2.1)式の正規分布の平均と分散を計算することが可能であることを示した。表1は時点 t での価格 P_t を1,000、時点 $t+n$ での状態1での価格 $P_{1,t+n}$ を900、状態2での価格 $P_{2,t+n}$ を1,000、状態3での価格 $P_{3,t+n}$ を1,100とし、投資家の各状態にたいする主観確率 ω_i を0.2, 0.5, 0.3とするときの(1.5)式と(2.3)式と(2.4)式の数値例を表1で表した。

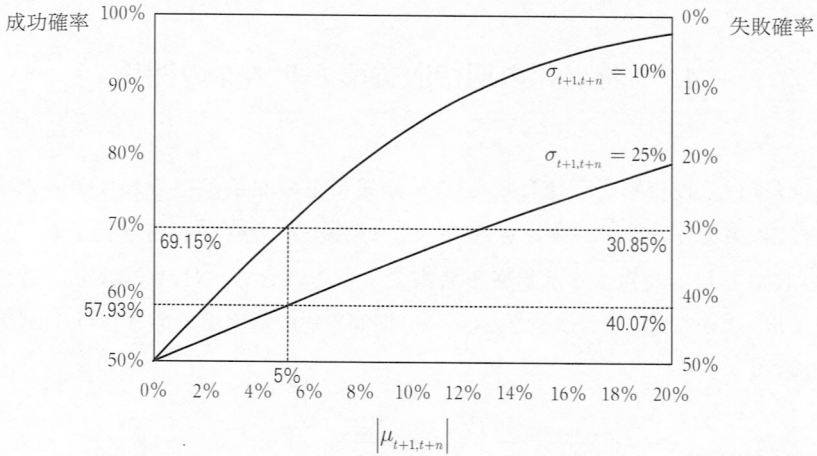
次節では、まず、投資家が予想する時点 $t+n$ の資産価格とその主観的成功確率を数値例で示して、 n 期間期待収益率と n 期間収益率の分散を求め、(2.3)式と(2.4)式を求め、最後に投資の成功確率を求める。

3. 数値例

時点 $t+m$ で投資に成功して取引を終了する場合の成功確率の数値例を示す。このとき、投資家の期待収益率の符号予想が実現した収益率の符号と異

表1 資産価格と $\tilde{R}_{t+1,t+n}$ の期待収益率 $\mu_{t+1,t+n}$ と収益率の分散 $\sigma_{t+1,t+n}^2$ の関係

A 時点 t での価格 $P_t = 1,000$				
状態 i	時点 $t+n$ での価格 $P_{i,t+n}$	確率 $\omega_{i,t+n}$	価格比 $P_{i,t+n}/P_t$	価格比と期待価格比との差の2乗 $(P_{i,t+n}/P_t - E[\tilde{P}_{t+n} \Omega_t]/P_t)^2$
$i=1$	$P_{1,t+n} = 900$	$\omega_1 = 0.2$	$P_{1,t+n}/P_t = 900/1,000 = 0.9$	$(P_{1,t+n}/P_t - E[\tilde{P}_{t+n} \Omega_t]/P_t)^2 = (0.9 - 1.01)^2 = 0.0121$
$i=2$	$P_{2,t+n} = 1,000$	$\omega_2 = 0.5$	$P_{2,t+n}/P_t = 1,000/1,000 = 1$	$(P_{2,t+n}/P_t - E[\tilde{P}_{t+n} \Omega_t]/P_t)^2 = (1 - 1.01)^2 = 0.0001$
$i=3$	$P_{3,t+n} = 1,100$	$\omega_3 = 0.3$	$P_{3,t+n}/P_t = 1,100/1,000 = 1.1$	$(P_{3,t+n}/P_t - E[\tilde{P}_{t+n} \Omega_t]/P_t)^2 = (1.1 - 1.01)^2 = 0.0081$
	期待価格 1,010 $E[\tilde{P}_{t+n} \Omega_t] = \sum_{i=1}^3 \omega_i P_{i,t+n}$		期待価格比 1.01 (1.5a)式 $\frac{E[\tilde{P}_{t+n} \Omega_t]}{P_t} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\omega_i P_{i,t+n}}{P_t} \right) = \exp(n\mu_{t+1,t+n} + n^2\sigma_{t+1,t+n}^2/2)$	分散 0.0049 (1.5b)式 $Var(\tilde{P}_{t+n}/P_t \Omega_t) = \sum_{i=1}^3 \omega_i (P_{i,t+n}/P_t - E[\tilde{P}_{t+n} \Omega_t]/P_t)^2 = \exp(2n\mu_{t+1,t+n} + n^2\sigma_{t+1,t+n}^2) \{ \exp(n^2\sigma_{t+1,t+n}^2) - 1 \}$
B 期間 $n=1$				
(2.3)式	$\sigma_{t+1,t+1}^2 = \ln \left\{ 1 + Var(\tilde{P}_{t+1}/P_t \Omega_t) / (E[\tilde{P}_{t+1} \Omega_t]/P_t)^2 \right\} / 1^2 = \ln(1 + 0.0049/1.01^2) / 1^2 = 6.922392\%$			
(2.4)式	$\mu_{t+1,t+1} = \ln \left\{ E[\tilde{P}_{t+1}/P_t \Omega_t]^2 / \sqrt{E[(\tilde{P}_{t+1}/P_t)^2 \Omega_t]} \right\} / 1 = \ln((1,010/1,000)^2 / (1.012423)^{1/2}) / 1 = 0.755436\%$			
期間 $n=2$				
(2.3)式	$\sigma_{t+1,t+2}^2 = \ln \left\{ 1 + Var(\tilde{P}_{t+2}/P_t \Omega_t) / (E[\tilde{P}_{t+2} \Omega_t]/P_t)^2 \right\} / 2^2 = (\ln(1 + 0.0049/1.01^2)) / 2^2 = 3.461196\%$			
(2.4)式	$\mu_{t+1,t+2} = \ln \left\{ E[\tilde{P}_{t+2}/P_t \Omega_t]^2 / \sqrt{E[(\tilde{P}_{t+2}/P_t)^2 \Omega_t]} \right\} / 2 = \ln((1,010/1,000)^2 / (1.012423)^{1/2}) / 2 = 0.377718\%$			



グラフ1：ケースA・B・F・Gの成功確率

なっても投資に成功する可能性が存在する。たとえば、時点 $t+m$ の資産価格を予想して計算した m 期間期待収益率が 5% (あるいは -5%) のとき⁶⁾、投資家は現時点で資産を購入し⁷⁾ (あるいは空売りをし)、実現した収益率がゼロ以上 (あるいはゼロ以下) となり、時点 $t+m$ で資産を売却して (あるいは買い戻して) 投資が成功する事前確率はグラフ 1 のように n 期間収益率のボラティリティが 10% のとき 69.15%、ボラティリティが 25% のとき 57.93% であり、表 2 の (1) ケース A・B・F・G に対応する⁸⁾。ここで、表 2 の $\phi_{t+1,t+m}$ を $\tilde{R}_{t+1,t+m}$ の実現値、 $\phi_{t+1,t+n}$ を $\tilde{R}_{t+1,t+n}$ の実現値とし、 $\mu_{t+1,t+m}$ と $\phi_{t+1,t+m}$ の符号が一致したときに、時点 $t+m$ で正の収益を得て、投資を終了するときのケースであり、詳細は次節で考察する。

資産価格がランダムに推移すると仮定するときには、投資の成功・失敗確率が各 50% であるのにたいして、上述の将来の価格にたいする投資家の予想とその主観的確率に基づく収益率が正規分布に従うと仮定するときには投資家の主観的な事前成功確率は投資家の予想に影響することが明確になった。

4. 3 時点間の期待収益率とリスクの関係

つぎに、投資家の予想に反して m 期後に正の収益が得られなかった場合、そのままのポジションを保持して n 期後 ($n > m$) で投資を終了して正の収益を得る時点 t での確率を考察する。そのとき、(1.4) 式より、時点 $t+m+1$ から時点 $t+n$ までの $(n-m)$ 期間平均収益率を求めると (4.1) 式となる⁹⁾。

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{t+m+1,t+n} &\equiv \frac{\tilde{p}_{t+m+1,t+n}}{n-m} = \frac{\ln \tilde{P}_{t+n} - \ln \tilde{P}_{t+m}}{n-m} \\ &= \frac{(\ln \tilde{P}_{t+n} - \ln P_t) - (\ln \tilde{P}_{t+m} - \ln P_t)}{n-m} = \frac{n\tilde{R}_{t+1,t+n} - m\tilde{R}_{t+1,t+n}}{n-m}\end{aligned}\quad (4.1)$$

また、投資家が n 時点での状態 $k (< \infty)$ の資産価格 $P_{k,t+n}$ を予想し、その価格毎に対応する投資家の主観的確率 $\omega_{k,t+n}$ を与えると、 $(n-m)$ 期間期待収益率は (4.2a) 式と表現でき、分散は (4.2b) 式となる。

$$E\left[\tilde{P}_{t+n}/\tilde{P}_{t+m} \mid \Omega_t\right] = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^k \omega_{i,t+n} \omega_{j,t+m} P_{i,t+n} / P_{j,t+m} \quad (4.2a)$$

$$\text{Var}\left(\tilde{P}_{t+n}/\tilde{P}_{t+m} \mid \Omega_t\right) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^k \omega_{i,t+n} \omega_{j,t+m} \left(P_{i,t+n} / P_{j,t+m} - E\left[\tilde{P}_{t+n}/\tilde{P}_{t+m} \mid \Omega_t\right]\right)^2 \quad (4.2b)$$

ここで、時点 t での Ω_t を条件とした $\tilde{R}_{t+m+1,t+n}$ は (4.3) 式のように平均 $\mu_{t+m+1,t+n}$ と分散 $\sigma_{t+m+1,t+n}^2$ の正規分布に従うと仮定する。

$$\tilde{R}_{t+m+1,t+n} \mid \Omega_t \sim N\left(\mu_{t+m+1,t+n}, \sigma_{t+m+1,t+n}^2\right) \quad (4.3)$$

(4.3) 式から $\tilde{p}_{t+m+1,t+n}$ の分布は (4.4) 式に従う。

$$\tilde{\rho}_{t+m+1,t+n} \mid \Omega_t \sim N\left((n-m)\mu_{t+m+1,t+n}, (n-m)^2\sigma_{t+m+1,t+n}^2\right) \quad (4.4)$$

ここで、 $\tilde{\rho}_{t+m+1,t+n}$ は時点 $t+m+1$ から時点 $t+n$ の期間収益率 $(n-m)\tilde{R}_{t+m+1,t+n}$ を表し、(4.1)式と(4.4)式より、 $\tilde{R}_{t+m+1,t+n}$ の期待値と分散を $\mu_{t+1,t+n}$ と $\mu_{t+1,t+m}$ と $\sigma_{t+1,t+n}^2$ と $\sigma_{t+1,t+m}^2$ で表現すると(4.5)式となる。

$$(n-m)\mu_{t+m+1,t+n} = n\mu_{t+1,t+n} - m\mu_{t+1,t} \quad (4.5a)$$

$$(n-m)^2\sigma_{t+m+1,t+n}^2 = n^2\sigma_{t+1,t+n}^2 - 2mn\gamma\sigma_{t+1,t+m}\sigma_{t+1,t+n} + m^2\sigma_{t+1,t+m}^2 \quad (4.5b)$$

ここで、 γ は m 期間収益率と n 期間収益率の相関係数を表す。(4.4)式と(4.5)式より、平均 $\mu_{t+m+1,t+n}$ と分散 $\sigma_{t+m+1,t+n}^2$ の正規分布の積率母関数を参考にして、 $\tilde{P}_{t+n}/\tilde{P}_{t+m+1} \mid \Omega_t$ の期待収益率と分散は(4.6)式となる。

$$\begin{aligned} E\left[\tilde{P}_{t+n}/\tilde{P}_{t+m} \mid \Omega_t\right] &= \exp\left\{(n-m)\mu_{t+m+1,t+n} + (n-m)^2\sigma_{t+m+1,t+n}^2/2\right\} \\ &= \exp\left\{n\mu_{t+1,t+n} - m\mu_{t+1,t+m} + \left(n^2\sigma_{t+1,t+n}^2 - 2mn\gamma\sigma_{t+1,t+m}\sigma_{t+1,t+n} + m^2\sigma_{t+1,t+m}^2\right)/2\right\} \end{aligned} \quad (4.6a)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\tilde{P}_{t+n}/\tilde{P}_{t+m} \mid \Omega_t\right) &= \exp\left\{2(n-m)\mu_{t+m+1,t+n} + (n-m)^2\sigma_{t+m+1,t+n}^2\right\} \left\{\exp\left((n-m)^2\sigma_{t+m+1,t+n}^2\right) - 1\right\} \\ &= \exp\left\{2\left(n\mu_{t+1,t+n} - m\mu_{t+1,t+m}\right) + n^2\sigma_{t+1,t+n}^2 - 2mn\gamma\sigma_{t+1,t+m}\sigma_{t+1,t+n} + m^2\sigma_{t+1,t+m}^2\right\} \\ &\quad \times \left\{\exp\left(n^2\sigma_{t+1,t+n}^2 - 2mn\gamma\sigma_{t+1,t+m}\sigma_{t+1,t+n} + m^2\sigma_{t+1,t+m}^2\right) - 1\right\} \\ &= E\left[\tilde{P}_{t+n}/\tilde{P}_{t+m} \mid \Omega_t\right]^2 \left\{\exp\left((n-m)^2\sigma_{t+m+1,t+n}^2\right) - 1\right\} \end{aligned} \quad (4.6b)$$

(4.6)式から、 $\mu_{t+m+1,t+n}$ と $\sigma_{t+m+1,t+n}^2$ を \tilde{P}_{t+m+1} と \tilde{P}_{t+n} で表現するために、まず(4.6b)式から $(n-m)^2\sigma_{t+m+1,t+n}^2$ を求めると(4.7)式となる。

表2 将来の価格変動を予想して投資決定を行うケースの確率

予 想		$\mu_{t+1,t+m} > 0$ (現物取引)			
		$\mu_{t+1,t+n} > 0$		$\mu_{t+1,t+n} < 0$	
	実現値の関係	$\phi_{t+1,t+m} > 0$	$\phi_{t+1,t+m} < 0$	$\phi_{t+1,t+m} > 0$	$\phi_{t+1,t+m} < 0$
	取引終了時点	時点 $t+m$	時点 $t+n$	時点 $t+m$	時点 $t+n$
$\mu_{t+m+1,t+n} > 0$	$\phi_{t+m+1,t+n} > 0$	(1) ケース A 成功	(2) ケース C 成功 (3) ケース C 失敗	(1) ケース B 成功	(2) ケース E 成功 (3) ケース E 失敗
	$\phi_{t+m+1,t+n} < 0$		(4) ケース C 大失敗		(4) ケース E 大失敗
$\mu_{t+m+1,t+n} < 0$	$\phi_{t+m+1,t+n} > 0$		(2) ケース D 成功 (3) ケース D 失敗	存在しない	
	$\phi_{t+m+1,t+n} < 0$		(4) ケース D 大失敗		
予 想		$\mu_{t+1,t+m} < 0$ (空売り)			
		$\mu_{t+1,t+n} > 0$		$\mu_{t+1,t+n} < 0$	
	実現値の関係	$\phi_{t+1,t+m} > 0$	$\phi_{t+1,t+m} < 0$	$\phi_{t+1,t+m} > 0$	$\phi_{t+1,t+m} < 0$
	取引終了時点	時点 $t+n$	時点 $t+m$	時点 $t+n$	時点 $t+m$
$\mu_{t+m+1,t+n} > 0$	$\phi_{t+m+1,t+n} > 0$	存在しない		(4) ケース I 大失敗	(1) ケース F 成功
	$\phi_{t+m+1,t+n} < 0$			(3) ケース I 失敗 (2) ケース I 成功	
$\mu_{t+m+1,t+n} < 0$	$\phi_{t+m+1,t+n} > 0$	(4) ケース J 大失敗	(1) ケース G 成功	(4) ケース H 大失敗	
	$\phi_{t+m+1,t+n} < 0$	(3) ケース J 失敗 (2) ケース J 成功		(3) ケース H 失敗 (2) ケース H 成功	

(注) ここで、表の式番号は下の確率である。

$$(n-m)\sigma_{t+m+1,t+n}^2 = \ln \left\{ 1 + \text{Var} \left(\tilde{P}_{t+n} / \tilde{P}_{t+m} \mid \Omega_t \right) / E \left[\tilde{P}_{t+n} / \tilde{P}_{t+m} \mid \Omega_t \right]^2 \right\} \quad (4.7)$$

(4.7)式を(4.6a)式に代入して、 $\mu_{t+m+1,t+n}$ を求めると、(4.8)式となる。

$$(n-m)\mu_{t+m+1,t+n} = \ln \left\{ E \left[\tilde{P}_{t+n} / \tilde{P}_{t+m} \mid \Omega_t \right]^2 / \sqrt{E \left[\left(\tilde{P}_{t+n} / \tilde{P}_{t+m} \right)^2 \mid \Omega_t \right]} \right\} \quad (4.8)$$

また、(4.5b)式と(4.7)式より γ を各期間の収益率の標準偏差で表現すると(4.9)式となり、(2.3)式と(2.4)式と(4.7)式と(4.8)式から各時点の予想価格と主観的確率で表現できる。

$$\gamma = \frac{1}{2} \left\{ \frac{n\sigma_{t+1,t+n}}{m\sigma_{t+1,t+m}} + \frac{m\sigma_{t+1,t+m}}{n\sigma_{t+1,t+n}} - \frac{(n-m)^2\sigma_{t+m+1,t+n}^2}{mn\sigma_{t+1,t+m}\sigma_{t+1,t+n}} \right\} \quad (4.9)$$

5. 投資の成功確率

最後に、時点 $t+m$ で投資に失敗して、そのままのポジションで時点 $t+n$ で成功する現時点 t での成功確率を考察する。ここで、表2の $\phi_{t+m+1,t+n}$ は $\tilde{R}_{t+m+1,t+n}$ の実現値を表す。つぎの手順で成功・失敗確率を導出する。

- ① いつ投資を終了するかを決定する(時点 $t+m$ の決定)。また、投資の終了時点(時点 $t+m$)で正の収益を得られなかったためのために、投資の最終時点を決しておき(時点 $t+n$ の決定)。
- ② 時点 $t+m$ での状態 i の予想価格 $P_{i,t+m}$ と時点 $t+n$ での状態 i の予想価格 $P_{i,t+n}$ と各状態確率 ω_i を主観的に与えて、(1.5a)式より価格比の期待値 $E \left[\tilde{P}_{t+m} \mid \Omega_t \right] / P_t$ と $E \left[\tilde{P}_{t+n} \mid \Omega_t \right] / P_t$ を求める。また、(1.5b)式より価格比の

分散 $Var\left(\frac{\tilde{P}_{t+m}}{P_t} \middle| \Omega_t\right)$ と $Var\left(\frac{\tilde{P}_{t+n}}{P_t} \middle| \Omega_t\right)$ を計算する。

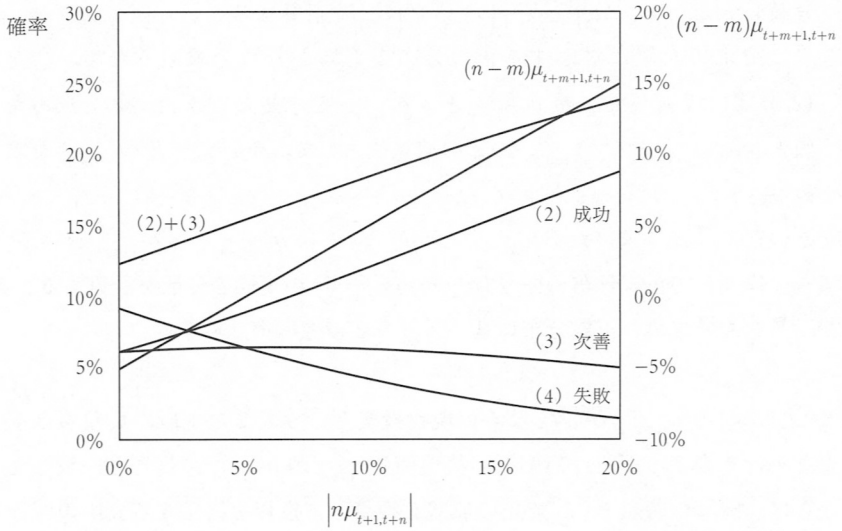
- ③ ②で求めた値に対応する正規分布の平均と分散を求めるため、②を(2.3)式に代入して、 $m^2\sigma_{t+1,t+m}^2$ と $n^2\sigma_{t+1,t+n}^2$ を求める。また、②で求めた値と $m^2\sigma_{t+1,t+m}^2$ と $n^2\sigma_{t+1,t+n}^2$ を(2.4)式に代入して、 $m\mu_{t+1,t+m}$ と $n\mu_{t+1,t+n}$ を求める。
- ④ つぎに、③で求めた $m\mu_{t+1,t+m}$ と $n\mu_{t+1,t+n}$ と $m^2\sigma_{t+1,t+m}^2$ と $n^2\sigma_{t+1,t+n}^2$ を(4.5)式に代入して正規分布に従う $(n-m)\tilde{R}_{t+m+1,t+n}$ の平均と分散を計算する。
- ⑤ ③と④で求めた正規分布に基づき、表2の確率を計算する。

ここで、③の $\mu_{t+1,t+m}$ が正であれば現物投資を行う表2の上段、負ならば空売りを行う表2の下段に対応し、実現値 $\phi_{t+1,t+m}$ が $\mu_{t+1,t+m}$ の符号と一致したならば、前節の時点 $t+m$ で正の収益を獲得して投資を終了する表中の背景色のあるケース A・B・F・G となり、その成功確率は(1)式である。

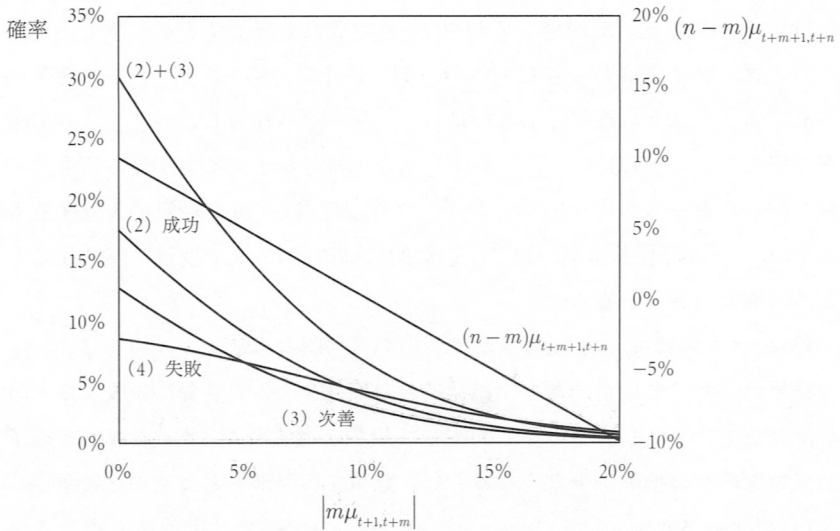
他方、 $\mu_{t+1,t+m}$ と $\phi_{t+1,t+m}$ の符号が一致しなかった場合には、時点 $t+m$ での投資のポジションを保持して時点 $t+n$ で取引を終了するケースである。そのとき、表2ではケース C・D・E・H・I・J に対応し、 $\mu_{t+1,t+m} > 0$ を条件とした $\phi_{t+1,t+m} < 0$ の確率、あるいは $\mu_{t+1,t+m} < 0$ を条件とした $\phi_{t+1,t+m} > 0$ の確率を表している。(2)は $\mu_{t+1,t+n}$ と $\mu_{t+m+1,t+n}$ の符号がともに実現値の符号と一致しているケースの成功確率である。これは時点 $t+m$ で投資に失敗するものの $\mu_{t+1,t+n}$ の符号予想が一致し、最終的には時点 $t+n$ で投資に成功するときの事前成功確率を表す。

(3)のケースは $\mu_{t+1,t+n}$ の符号が実現値の符号異なり、 $\mu_{t+m+1,t+n}$ と $\phi_{t+m+1,t+n}$ の符号が一致する場合であり、結果的には時点 $t+m$ で投資に失敗するものの、時点 $t+m$ で取引を終了したときの損失よりも時点 $t+n$ で取引を終了していたときの損失が少なくなるという意味で次善確率とよぶことにする。

(4)のケースは $\mu_{t+1,t+m}$ と $\mu_{t+1,t+n}$ と $\mu_{t+m+1,t+n}$ のすべてが実現値と異なる場合であり、時点 $t+m$ で投資に失敗し、さらに時点 $t+n$ まで取引を延期し



グラフ 2A: $|m\mu_{t+1,t+m}| = 5\%$ のときの時点 $t+n$ での成功確率



グラフ 2B: $|n\mu_{t+1,t+n}| = 5\%$ のときの時点 $t+n$ での成功確率

たことによって、時点 $t+m$ で取引を終了していたときの損失よりも大きな損失を被ることになり、結果的には投資を失敗する確率である。

つぎに、時点 $t+m$ で投資に失敗したためにポジションを保持して、時点 $t+n$ で取引を終了するとき、 $m=1$, $n=2$, $\sigma_{t+1,t+m}=10\%$, $\sigma_{t+1,t+n}=25\%$, $\sigma_{t+m+1,t+n}=20\%$ の数値例で投資の成功・失敗確率をグラフ 2 で示した。ここで、グラフ 2A は $\mu_{t+1,t+m}$ を $\pm 5\%$ のとき、 $|n\mu_{t+1,t+n}|$ を横軸にとり、縦軸に成功・失敗確率を測ったグラフである。このときの m 期間収益率と n 期間収益率の相関係数 γ は (4.9) 式より 0.65 である。また、グラフ 2B は $n\mu_{t+1,t+n}$ を $\pm 5\%$ と想定したグラフである。

グラフ 2A から $\mu_{t+1,t+m} = \pm 5\%$ の場合には、 $|n\mu_{t+1,t+n}|$ が 5% 以下、すなわち $-5\% \leq n\mu_{t+1,t+n} \leq 5\%$ のときには、失敗確率 (4) は成功確率 (2) あるいは次善確率 (3) を上回るが、(2) プラス (3) の確率よりも小さいため、必ず時点 $t+n$ までポジションを保持する方が賢明である。

また、グラフ 2B から $n\mu_{t+1,t+n} = \pm 5\%$ の場合には、成功確率 (2) プラス次善確率 (3) が失敗確率 (4) を上回る $|\mu_{t+1,t+m}|$ は 15.5% 以下のときであり、 $-15.5\% \leq \mu_{t+1,t+m} \leq 15.5\%$ のとき、時点 $t+n$ までポジションを保持して失敗する事前確率と比べ、損失を少なくする事前確率が大きいという意味で、時点 $t+n$ までポジションを保持すべきであることを示唆する。

最後に、ボラティリティの上昇によって、累積正規分布の導関数は負となることから、現物取引のケースには成功確率は減少し、空売りのケースには増加することを記しておく。

おわりに

投資家が将来の m 期後と n 期後の価格予想に基づいて現在投資を行い、 m 期後に実際に正の収益を得られた場合には取引を終了するが、予想に反して正の収益が得られなかった場合には、そのままのポジションを保持して

n 期後で投資を終了する 2 時点の投資の意思決定問題を考察した。その際、1 期間あたりの資産の収益率が正規分布（ガウス分布）に従うことを仮定して、現時点で投資を行い m 期後に正の収益を得るかどうかの事前確率を導出し、数値例を示した。その結果、資産価格がランダムに推移すると仮定するときには、投資の成功確率が 50% であるのにたいして、収益率が正規分布に従うことを仮定するときには、投資家の主観的な事前成功確率は投資家の予想に影響することが確認した。

また、 $m=1$, $n=2$, m 期間収益率のボラティリティを 10%, n 期間収益率のボラティリティを 25%, m 期間収益率と n 期間収益率の相関係数を 0.65 とするとき、 m 期後に投資に失敗して、 n 期後までポジションを保持することが有利かを数値例で示した。その結果、 m 期間期待収益率が $\pm 5\%$ の場合には、 n 期間期待収益率の値に関係なく、 n 期後までポジションを保持し、 n 期間期待収益率が $\pm 5\%$ の場合には、 m 期間期待収益率が $\pm 15.5\%$ の範囲のときに n 期後までポジションを保持する方が賢明であることを示した。

実際には、 m 時点終了後の実現した資産価格を観測して、改めて n 時点の意思決定を行うことが現実的であり、投資のより高い成功確率を得ることができると考えられたが、本稿では、 m 時点でのポジションを変更しないケースのみを考察した。現実的にポジションの変更が可能である場合の投資の意思決定に関しては、延期のリアル・オプション問題として扱う必要があらう。

補 論 A

時点 $t+s$ の資産価格 \tilde{P}_{t+s} と時点 $t+s-1$ の資産価格 \tilde{P}_{t+s-1} の関係を (a1) 式のように考え、(a2) 式が成立する時点 $t+s$ の離散時間型複利相乗収益率あるいは離散時間型 1 期間相乗収益率を $\tilde{r}_{t+s}^{(1)}$ と定義する¹⁰⁾。

$$\tilde{P}_{t+s} = \tilde{P}_{t+s-1} (1 + \tilde{r}_{t+s}^{(1)}) = \tilde{P}_{t+s-1} \exp(\tilde{r}_{t+s}) \quad (s = 1, 2, \dots, n) \quad (a1)$$

$$\tilde{r}_{t+s}^{(1)} > -1 \quad (a2)$$

ここで、(a1)式の \tilde{r}_{t+s} は(1.1)式で定義した連続時間型複利収益率である。時点 $s=1$ のときの資産価格 P_t は既知とし、収益率 $\tilde{r}_{t+s}^{(1)}$ に(a1)式を再帰的に代入すると、(a3)式となる¹⁾。

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{t+n} &= \tilde{P}_{t+n-1} (1 + \tilde{r}_{t+n}^{(1)}) = \tilde{P}_{t+n-2} (1 + \tilde{r}_{t+n-1}^{(1)}) (1 + \tilde{r}_{t+n}^{(1)}) \\ &= P_t \prod_{s=1}^n (1 + \tilde{r}_{t+s}^{(1)}) = P_t (1 + \tilde{R}_{t+1, t+n}^{(1)})^n \end{aligned} \quad (a3)$$

ここで、 $\tilde{R}_{t+1, t+n}^{(1)}$ を時点 $t+1$ から時点 $t+n$ までの離散時間型 n 期間相乗収益率と定義して、 $\tilde{R}_{t+1, t+n}^{(1)}$ について解くと(a4)式となる。また、(1.2)式との関係から(a4)式が成立する。

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{t+1, t+n}^{(1)} &= (1 + \tilde{\rho}_{t+1, t+n}^{(1)})^{1/n} - 1 = \left(\frac{\tilde{P}_{t+n}}{P_t} \right)^{1/n} - 1 = \left\{ \prod_{s=1}^n (1 + \tilde{r}_{t+s}^{(1)}) \right\}^{1/n} - 1 \\ &= \exp(\tilde{R}_{t+1, t+n}^{(1)}) - 1 > -1 \end{aligned} \quad (a4)$$

ここで、(a4)式の $\tilde{\rho}_{t+1, t+n}^{(1)}$ を離散時間型 n 期間相乗収益率と定義し、(a4)式の最後の不等号は(a2)式に基づく。

〔注〕

- 1) 本稿では異時点間の収益の価値を論ずるが、無危険利率をゼロと仮定する。ただし、無危険利率をゼロよりも大きい値であると仮定しても容易に拡張できる。
- 2) このことは投資家が期間を資産売買の営業日で把握するのではなく、カレンダー日で認識するものと想定する。たとえば、1期間を1日とするとき、投資の意思決定日が月曜日のとき火曜日の株価を予想することになるが、意思決定日が金曜日のとき3期後(3日後)の月曜日の株価予想をしなければならないことになるためである。

- 3) 実際には、 m 時点終了後に実現した資産価格を観測して、改めて n 時点の意思決定を行うことが現実的であり、投資のより高い成功確率を得ることができると考えられるが、本稿では、 m 時点でのポジションを変更しないケースのみを考察することにす。また、ポジションの変更が可能である場合の投資の意思決定に関しては、延期のリアル・オプション問題あるいは最適停止問題と考えられる。
- 4) (1.1) 式で定義する収益率を連続時間型複利期待収益率とよぶと、補論 A で定義する離散時間型複利相乗期待収益率を使用しても以降の節の考察に大きな影響を与えるものではない。
- 5) 本稿では資産価格の収益率が幾何ブラウン運動を仮定するものではない。また、1 期間収益率が正規分布に従う場合には、(1.4) 式より任意の n 期間収益率も正規分布に従うことになる。
- 6) 時点 $t+n$ の資産の期待価格を 1,056.5 あるいは 956.0 と予想するときであり、前者の予想のときには資産を購入し、後者の予想のときには空売りをするケースである。
- 7) 以下では現物取引とよぶ。
- 8) Excel を使用する場合、現物取引の成功確率の関数式は「 $=1 - \text{NORMDIST}(0, \text{期待収益率}, \text{収益率の標準偏差}, \text{TRUE})$ 」によって、成功確率を求めることができる。また、空売りの成功確率の関数式は「 $=\text{NORMDIST}(0, \text{期待収益率}, \text{収益率の標準偏差}, \text{TRUE})$ 」によって求めることができる。
- 9) m は 1 以上の整数とする。
- 10) 本稿での記号は拙稿 [1][2] と同一のものを使用した。
- 11) 離散時間型相加収益率を下式の $\tilde{R}_{t+1,t+n}^{(2)}$ で定義した場合には、本稿での考察には誤差 ε_n が生じるため、導出に容易な (1.3) 式で定義する連続時間型収益率を使用することを薦める。

$$\tilde{R}_{t+1,t+n}^{(2)} \equiv \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n \left(\frac{\tilde{P}_{t+s} - \tilde{P}_{t+s-1}}{\tilde{P}_{t+s-1}} \right) = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n \frac{\tilde{P}_{t+s}}{\tilde{P}_{t+s-1}} - 1 = \tilde{R}_{t+1,t+n}^{(1)} + \varepsilon_n \geq \tilde{R}_{t+1,t+n}^{(1)}$$

[参考文献]

- [1] 中川裕司, 「ヒストリカル・データを使った連続時間型平均収益率の罠 (Trap of Continuous-Time Average Returns, Using Historical Data)」, 『岐阜経済大学論集』第 40 巻 3 号 (2007 年 3 月)。
- [2] 中川裕司, 「期間が異なる 2 種類の連続時間型平均収益率と離散時間型相乗平均収益率の関係 (Relationship between Continuous-Time Average Return and Discrete-Time Geometrical Average Return of Two Different Periods)」, 『岐阜経済大学論集』

集』第41巻1号（2007年11月）。

〔3〕 Richard A. Brealey and Myers, S.C. *Principles of Corporate Finance*, McGraw-Hill/Irwin; 8 edition, New York.