岐阜経済大学論集 41 巻 1 号（2007 年）

期間が異なる2種類の連続時間型平均収益率と離散時間型相乗平均収益率の関係

中川　裕　司

1. はじめに

拙稿〔1〕で，ヒストリカル・データを使った期間が異なる 2 種類の連続時間型平均収益率とその標本標準偏差（ヒストリカル・ボラティリティ）から，異なる 2 時点の価格比の対数の確率分布が任意の範囲で一様分布に従うとき，あるいは正規分布に従うときに，n 期間平均収益率の大きさ（絶対値）が m 期間平均収益率（$m<n$）の大きさを上回る可能性を考察した。そのとき，期間比を 2，価格比を 0.9048 から 1.1052 の範囲で一様分布に従うとき，m 期間平均収益率の絶対値が 1% として，両平均収益率の符号が同じとき，n 期間平均収益率の大きさが m 期間平均収益率の大きさを上回る確率は 60% となり，両平均収益率の符号が異なるときに上回る確率は 40% であることが確認できた。また，価格比の対数の確率分布が正規分布に従うときに，換言すれば，収益率が対数正規分布に従うとき，m 期間平均収益率の絶対値が 2% のときに n 期間平均収益率の大きさが m 期間平均収益率の大きさを上回る確率は，m 期間収益率のボラティリティが 2% のときには 31.73%，m 期間収益率のボラティリティが 20% のときに 92.03% であることを明らかにした。

本稿では，離散時間で考えた収益率の相乗平均（以下では，離散時間型相乗平均収益率とよぶ）について，拙稿〔1〕で論じた連続時間型平均収益率との関連を示すとともに，2 種類の期間が異なる平均収益率，すなわち，両平均収益率がともにヒストリカル・データを使って求めた平均収益率（以下では，ヒストリカル・アヴェレッジ・リターンとよぶ）である場合，各平均収益率のヒストリカル・アヴェレッジ・リターンと将来の収益率の期待値（以下で

は，期待収益率とよぶ）である場合，さらに，両平均収益率が共に期待収益率である場合のそれぞれのケースで，拙稿〔1〕と同様に，n 期間平均収益率の大きさが m 期間平均収益率の大きさを上回る可能性を考察する。さらに，期待収益率を含む上述の2ケースで，投資戦略の結果，正の収益を得る確率を求めて，投資家の一助としたい。

次節では，離散時間型相乗平均収益率の定義と拙稿〔1〕で論じた連続時間型平均収益率との関係を示し，3節から5節では，現時点ではヒストリカル・アヴェレッジ・リターンと期待収益率とを明確に区別した上で，2種類の期間が異なる収益率がどちらに属するかによって，3つのケースに分けて，2種類の平均あるいは期待収益率の大きさ（絶対値）が一致する資産価格の条件を求める。6節では，資産価格比が対数正規分布（対数ガウス分布）に従う場合に，2時点で意思決定を行う投資戦略を考えて，予想通りに資産価格が上または下に変動した場合の投資成功確率を求める。ここでの価格変動予想は，正確な値までは必要ないと考える。

2. 連続時間型平均収益率と離散時間型相乗平均収益率の関係

2.1 ヒストリカル・アヴェレッジ・リターンのケース

まず，ヒストリカル・リターンを時点 $t-s$ の資産価格と時点 $t-s-1$ の資産価格の関係で(2.1)式のように考え，(2.1)式が成立する時点 $t-s$ の収益率を離散時間型平均収益率 $r_{t-s}^{(1)}$ あるいは離散時間型1期間収益率と定義する。

$$P_{t-s} = P_{t-s-1}\left(1 + r_{t-s}^{(1)}\right) = P_{t-s-1}\exp\left(r_{t-s}\right) \qquad (s = 0,1,\cdots,n) \qquad (2.1)$$

$$-1 \le r_{t-s}^{(1)} \tag{2.2}$$

ここで，r_{t-s} は連続時間型平均収益率であり[1)]，$0 < P_{t-s}$ とすると(2.1)式から (2.2) 式となる。時点 $s=0$ を現時点として，収益率 $r_t^{(1)}$ に(2.1)式を再帰的に代入すると，(2.3)式となる。

$$P_t = P_{t-1}\left(1+r_t^{(1)}\right) = P_{t-2}\left(1+r_{t-1}^{(1)}\right)\left(1+r_t^{(1)}\right) = P_{t-n-1}\prod_{s=0}^{n-1}\left(1+r_{t-s}^{(1)}\right) \tag{2.3}$$

(2.3)式の各辺を P_{t-n-1} で割って，離散時間型 n 期間収益率 $\rho_{t-n,t}^{(1)}$ を(2.4)式と定義する。

$$1+\rho_{t-n,t}^{(1)} \equiv \left(1+R_{t-n,t}^{(1)}\right)^n = P_t / P_{t-n-1} = \prod_{s=0}^{n-1}\left(1+r_{t-s}^{(1)}\right) = \exp\left(\rho_{t-n,t}\right) \ge 0 \tag{2.4}$$

ここで，$R_{t-n,t}^{(1)}$ は時点 $t-n$ から時点 t までの離散時間型 n 期間相乗平均収益率，$\rho_{t-n,t}^{(1)}$ は時点 $t-n$ から時点 t までの離散時間型 n 期間収益率を表す[2)]。(2.2)式より，(2.4)式はゼロ以上であり，ゼロとなるときは $r_{t-s}^{(1)} = -1$ であり，時点 $t-s$ で $P_{t-s}=0$，すなわち債務不履行（デフォルト）になったと想定する。(2.4)式から，$R_{t-n,t}^{(1)}$ について解くと，(2.5)式となる。

$$R_{t-n,t}^{(1)} = \left(1+\rho_{t-n,t}^{(1)}\right)^{1/n} - 1 = \left(\frac{P_t}{P_{t-n-1}}\right)^{1/n} - 1 = \left\{\prod_{s=0}^{n-1}\left(1+r_{t-s}^{(1)}\right)\right\}^{1/n} - 1 = \exp\left(R_{t-n,t}\right) - 1 \tag{2.5}$$

つぎに，資産価格が常に有限値であることを前提にして，(2.5)式の n に対する極限を考えて，遠い過去の離散時間型相乗平均収益率を求めると(2.6)式になる。

$$R_{t-\infty,t}^{(1)} \equiv \lim_{n\to\infty} R_{t-n,t}^{(1)}\Big|_{0<P_{t-\infty}<\infty} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(P_t / P_{t-n-1}\right)^{1/n} - 1\right\}\Big|_{0<P_{t-\infty}<\infty} = 0 \tag{2.6}$$

ここで，直感的には，(2.6)式の $P_{t-\infty}$ は遠い過去の資産価格であり，有限値であり，無限期間相乗平均収益率 $R_{t-\infty,t}^{(1)}$ はゼロに収束する。すなわち，n の極限では，平均収益率はゼロに収束することを意味している。(2.2)式と(2.6)式から，(2.7)式が成立する。

$$\left|r_{t-s}^{(1)}\right| \geq R_{t-\infty,t}^{(1)} \tag{2.7}$$

ここで，(2.7)式の等号は，$P_{t-s}=P_{t-s-1}$ のときであり，$r_{t-s}^{(1)}$ と $R_{t-\infty,t}^{(1)}$ はともにゼロである。

2.2　期待収益率のケース

また，期待収益率を想定するときには，時点 t の資産価格と時点 $t+n$ の資産価格の関係を(2.8)式のように考え，(2.8)式が成立する時点 $t+s$ の収益率を離散時間型期待収益率 $\tilde{r}_{t+s}^{(1)}$ あるいは離散時間型1期間収益率と定義する。

$$\widetilde{P}_{t+s}=\widetilde{P}_{t+s-1}\left(1+\tilde{r}_{t+s}^{(1)}\right)=\widetilde{P}_{t+s-1}\exp\left(\tilde{r}_{t+s}\right) \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{2.8}$$

$$-1 \leq \tilde{r}_{t+s}^{(1)} \tag{2.9}$$

ここで，$\tilde{r}_{t-s}$ は連続時間型平均収益率であり，$0<\widetilde{P}_{t+s}$ とする。時点 $s=0$ のときの資産価格 P_t は既知とし，収益率 $\tilde{r}_{t+s}^{(1)}$ に(2.8)式を再帰的に代入すると，(2.10)式となる。

$$\widetilde{P}_{t+n}=\widetilde{P}_{t+n-1}\left(1+\tilde{r}_{t+n}^{(1)}\right)=\widetilde{P}_{t+n-2}\left(1+\tilde{r}_{t+n-1}^{(1)}\right)\left(1+\tilde{r}_{t+n}^{(1)}\right)=P_t\prod_{s=1}^{n}\left(1+\tilde{r}_{t+s}^{(1)}\right) \tag{2.10}$$

(2.10)式の各辺を P_t で割って，離散時間型 n 期間収益率 $\tilde{\rho}_{t+1,t+n}^{(1)}$ を(2.11)式と定義する。

$$1+\tilde{\rho}_{t+1,t+n}^{(1)} \equiv \left(1+\widetilde{R}_{t+1,t+n}^{(1)}\right)^n=\widetilde{P}_{t+s}\Big/P_t=\prod_{s=1}^{n}\left(1+\tilde{r}_{t+s}^{(1)}\right)=\exp\left(\tilde{\rho}_{t+1,t+n}\right)\geq 0 \tag{2.11}$$

ここで，$\widetilde{R}_{t+1,t+n}^{(1)}$ は時点 $t+1$ から時点 $t+n$ までの離散時間型 n 期間相乗平均収益率，$\tilde{\rho}_{t+1,t+n}^{(1)}$ は時点 $t+1$ から時点 $t+n$ までの離散時間型 n 期間収益率，$\tilde{\rho}_{t+1,t+n}$ は連続時間型 n 期間平均収益率を表す[3)]。(2.9)式より，(2.11)式はゼロ以上であり，時点 $t+s$ でデフォルトの可能性を考慮し，そのとき $\tilde{r}_{t+s}^{(1)}=-1$ と想定する。(2.11)式から，$\widetilde{R}_{t+1,t+n}^{(1)}$ について解くと，(2.12)式となる。

$$\widetilde{R}^{(1)}_{t+1,t+n} = \left(1+\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}\right)^{1/n} - 1 = \left(\frac{\widetilde{P}_{t+n}}{P_t}\right)^{1/n} - 1 = \left\{\prod_{s=1}^{n}\left(1+\tilde{r}^{(1)}_{t+s}\right)\right\}^{1/n} - 1$$
$$= \exp\left(\tilde{\rho}_{t+1,t+n}\right) - 1 \geq -1 \qquad (2.12)$$

つぎに，資産価格が常に有限値であることを前提にして，(2.12)式の n に対する極限を考えて，遠い将来の離散時間型相乗平均収益率を求める。

$$\widetilde{R}^{(1)}_{t+1,t+\infty} \equiv \underset{n\to\infty}{\mathrm{plim}}\, \widetilde{R}^{(1)}_{t+1,t+n}\Big|_{0<\widetilde{P}_{t+\infty}<\infty} = \underset{n\to\infty}{\mathrm{plim}} \left\{\left(\widetilde{P}_{t+n}/P_t\right)^{1/n} - 1\right\}\Big|_{0<\widetilde{P}_{t+\infty}<\infty} = 0 \qquad (2.13)$$

ここで，直感的には，(2.13)式の $P_{t+\infty}$ は遠い将来の資産価格であり，有限値であるため，無限期間相乗平均収益率 $\widetilde{R}^{(1)}_{t+1,t+n}$ はゼロに収束する。すなわち，n の極限では，平均収益率はゼロに収束することを意味している。(2.9)式と(2.13)式から，(2.14)式が成立する。

$$\left|\tilde{r}^{(1)}_{t+s}\right| \geq \widetilde{R}^{(1)}_{t,t+\infty} \qquad (2.14)$$

ここで，(2.14)式の等号は，$\widetilde{P}_{t+s} = \widetilde{P}_{t+s-1}$ のとき，$\tilde{r}^{(1)}_{t+s}$ と $\widetilde{R}^{(1)}_{t+1,t+\infty}$ はともにゼロである。

3. 期間が異なる2種類のヒストリカル・アヴェレッジ・リターンの大きさの一致条件

3.1 両平均収益率がヒストリカル・リターンのケース

期間が異なる2種類の平均収益率がともにヒストリカル・アヴェレッジ・リターンである場合，$1 \leq m < n$ の仮定の下で，$R^{(1)}_{t-m,t}$ と $R^{(1)}_{t-n,t}$ の大小関係を考えるため，$\delta^{(1)}_{m,n}$ を(2.5)式から(3.1)式のように定義する。ここで，平均収益率の絶対値で比較することは，時点 $t-m-1$ あるいは時点 $t-n-1$ の資産価格が時点 t での資産価格を中心に，プラス方向とマイナス方向に等しい確

率で出現していたであろうという想定に基づいている。

$$\delta_{m,n}^{(1)} \equiv \left|R_{t-m,t}^{(1)}\right| - \left|R_{t-n,t}^{(1)}\right| = \left|\left(\frac{P_t}{P_{t-m-1}}\right)^{1/m} - 1\right| - \left|\left(\frac{P_t}{P_{t-n-1}}\right)^{1/n} - 1\right| \qquad (3.1)$$

次項では，$\delta_{m,n}^{(1)} = 0$ となる条件，すなわち期間が異なる2種類のヒストリカル・アヴェレッジ・リターンが同値になる条件を考える。すなわち，n と m と P_t と P_{t-m-1} の値を与えることによって，離散時間型 m 期間相乗平均収益率が離散時間型 n 期間相乗平均収益率に一致するような一意の P_{t-n-1} が決定する。換言すれば，両平均収益率 $R_{t-m,t}^{(1)}$ と $R_{t-n,t}^{(1)}$ と期間 m と n が公表されるとき，P_{t-n-1} は P_t と P_{t-m-1} の関数，あるいは，P_{t-m-1} は P_t と P_{t-n-1} の関数であると考える。

3.2　$-1 < \rho_{t-n,t}^{(1)} < \rho_{t-m,t}^{(1)} < 0$ または $0 < \rho_{t-m,t}^{(1)} < \rho_{t-n,t}^{(1)}$ のケース

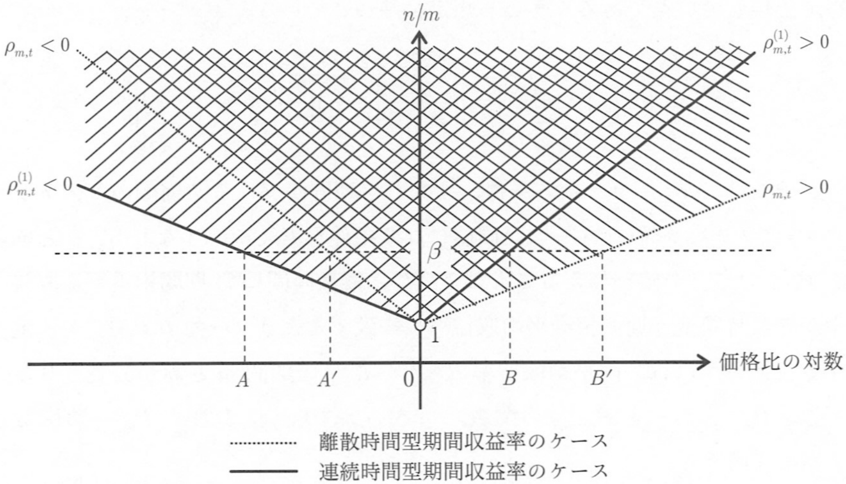
まず，期間収益率 $\rho_{t-m,t}^{(1)}$ と $\rho_{t-n,t}^{(1)}$ の関係が $-1 < \rho_{t-n,t}^{(1)} < \rho_{t-m,t}^{(1)} < 0$ または $0 < \rho_{t-m,t}^{(1)} < \rho_{t-n,t}^{(1)}$ のとき，$\delta_{m,n}^{(1)} = 0$ となる条件を考える。そのとき(3.1)式から，(3.2)式となる。

$$P_{t-n-1} = P_{t-m-1}^{n/m} \Big/ P_t^{n/m-1}, \qquad P_{t-m-1} = P_{t-n-1}^{m/n} P_t^{1-m/n} \qquad (3.2)$$

(3.2)式を1プラス m 期間収益率に対する1プラス n 期間収益率，あるいは時点 $t-n-1$ の資産価格に対する時点 $t-m-1$ の資産価格の比に代入すると，(3.3)式となる。

$$\frac{P_{t-m-1}}{P_{t-n-1}} = \frac{P_t / P_{t-n-1}}{P_t / P_{t-m-1}} = \left(\frac{P_t}{P_{t-m-1}}\right)^{n/m-1} = \left(\frac{P_t}{P_{t-n-1}}\right)^{1-m/n} = \left(1+\rho_{t-m,t}^{(1)}\right)^{n/m-1} = \left(1+\rho_{t-n,t}^{(1)}\right)^{1-m/n}$$

$$= \exp\left\{\rho_{t-m,t}\left(\frac{n}{m}-1\right)\right\} = \exp\left\{\rho_{t-n,t}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right\} \qquad (3.3)$$



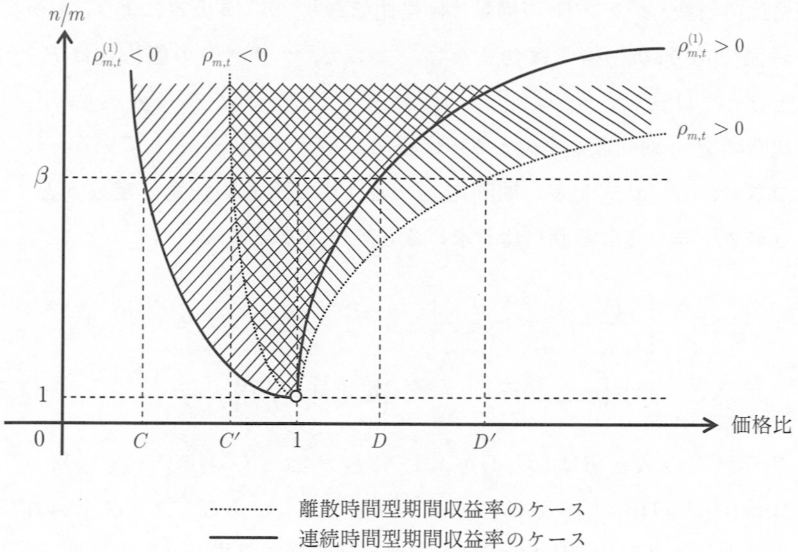
グラフ 1A：$\left|R^{(1)}_{t-n,t}\right| = \left|R^{(1)}_{t-m,t}\right|$ を満足する直線（$0 < \rho^{(1)}_{m,t} < \rho^{(1)}_{n,t}$ または $-1 < \rho^{(1)}_{n,t} < \rho^{(1)}_{m,t} < 0$ のケース）

ここで，$\rho_{t-m,t}$ は時点 $t-m$ から時点 t までの連続時間型 m 期間収益率，$\rho_{t-n,t}$ は時点 $t-n$ から時点 t までの連続時間型 n 期間収益率を表す。(3.3)式を n/m について解くと，$\delta^{(1)}_{m,n} = 0$ を満足する条件下で，期間比 n/m と価格比 P_{t-n-1}/P_{t-m-1} の関係(3.4)式が成立する[4)]。

$$\frac{n}{m} = 1 + \frac{\ln\left(P_{t-m-1}/P_{t-n-1}\right)}{\ln\left(1+\rho^{(1)}_{t-m,t}\right)} = 1 + \frac{\ln\left(P_{t-m-1}/P_{t-n-1}\right)}{m\ln\left(1+R^{(1)}_{t-m,t}\right)} = 1 + \frac{\ln\left(P_{t-m-1}/P_{t-n-1}\right)}{\rho_{t-m,t}} \tag{3.4a}$$

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{\ln\left(P_{t-n-1}/P_{t-m-1}\right)}{\ln\left(1+\rho^{(1)}_{t-n,t}\right)} = 1 + \frac{\ln\left(P_{t-n-1}/P_{t-m-1}\right)}{n\ln\left(1+R^{(1)}_{t-n,t}\right)} = 1 + \frac{\ln\left(P_{t-n-1}/P_{t-m-1}\right)}{\rho_{t-n,t}} \tag{3.4b}$$

ここで，$m < n$ の仮定により，(3.4a)式の左辺は1より大きい。(3.4a)式の右辺が1になる条件は $P_{t-n-1} = P_{t-m-1}$ のときであり，この条件は本節の前提



グラフ 1B：$\left|R^{(1)}_{t-n,t}\right| = \left|R^{(1)}_{t-m,t}\right|$ を満足する曲線（$0 < \rho^{(1)}_{m,t} < \rho^{(1)}_{n,t}$
または $-1 < \rho^{(1)}_{n,t} < \rho^{(1)}_{m,t} < 0$ のケース）

条件より除外されている。$\rho^{(1)}_{t-n,t}$ と $\rho^{(1)}_{t-m,t}$ が負のとき，(3.4a)式の右辺第2項の分子分母はともに負であるので，(3.4a)式の右辺は1より大きい。また，$\rho^{(1)}_{t-n,t}$ と $\rho^{(1)}_{t-m,t}$ が正のときには，(3.4a)式の右辺第2項の分子分母はともに正であるので，(3.4a)式の右辺は1より大きい。

(3.4a)式の左辺が各右辺より大きい場合には n 期間平均収益率の絶対値が m 期間平均収益率の絶対値より大きいケースであり，左辺が各右辺より小さい場合には n 期間平均収益率の絶対値が m 期間平均収益率の絶対値より小さいケースである。また，m 期間収益率の絶対値が n 期間収益率の絶対値より大きいときには，n 期間平均収益率の絶対値が m 期間平均収益率の絶対値より大きい可能性がゼロとなるため考慮の必要はない。

(3.4a)式を描いたものがグラフ1Aとグラフ1Bであり，グラフ1Aの横軸は

価格比の対数，グラフ1Bの横軸は価格比であり，$m<n$ 仮定により，$n/m>1$ の範囲であり，$n/m=1$ は含まない。ここで，グラフ内の価格比は P_{t-m-1}/P_{t-n-1}，$\rho_n^{(1)}$ は $\rho_{t-n,t}^{(1)}$，$\rho_m^{(1)}$ は $\rho_{t-m,t}^{(1)}$，$R_n^{(1)}$ は $R_{t-n,t}^{(1)}$，$R_m^{(1)}$ は $R_{t-m,t}^{(1)}$ で表示し，$\rho_{m,t}$ は連続時間型 m 期間収益率のときの価格比と n/m の関係を表している。

つぎに，(3.4a)式から，期間比 n/m を1より大きい任意の定数 β とするときの $\delta_{m,n}^{(1)}=0$ となる価格比を求めると，(3.5)式となる。

$$\frac{P_{t-m-1}}{P_{t-n-1}}=\left(\frac{P_t}{P_{t-m-1}}\right)^{\beta-1}=\left(\frac{P_t}{P_{t-n-1}}\right)^{1-1/\beta}=\left(1+\rho_{t-m,t}^{(1)}\right)^{\beta-1}=\left(1+\rho_{t-n,t}^{(1)}\right)^{1-1/\beta}$$
$$=\exp\left\{\rho_{t-m,t}(\beta-1)\right\}=\exp\left\{\rho_{t-n,t}\left(1-1/\beta\right)\right\} \tag{3.5}$$

グラフ1の A と B は $(\beta-1)\rho_{t-m,t}$，A' と B' は $(\beta-1)\ln\left(1+\rho_{t-m,t}^{(1)}\right)$，$C$ と D は $\exp\left\{(\beta-1)\rho_{t-m,t}\right\}$，$C'$ と D' は $\left(1+\rho_{t-m,t}^{(1)}\right)^{\beta-1}$ である。グラフ1Aの直線の上方またはグラフ1Bの曲線の上方は n 期間平均収益率の絶対値が m 期間平均収益率の絶対値より小さい領域であり，グラフ1Aの直線の下方またはグラフ1Bの曲線の下方は n 期間平均収益率の絶対値が m 期間平均収益率の絶対値より大きい領域を表す。

さらに，β が無限大になった場合を考える。

$$\lim_{\beta\to\infty}\left(P_{t-m-1}/P_{t-n-1}\right)=1+\rho_{t-n,t}^{(1)}=\exp\left(\rho_{t-n,t}\right) \tag{3.6}$$

このとき，両平均収益率が一致するという条件の下で，期間比が無限大になったときには，価格比 P_{t-m-1}/P_{t-n-1} は1プラス n 期間収益率となる。これは，n を一定とするとき，m が限りなくゼロに近づく結果，1プラス n 期間収益率になることを意味する。

3.3　$-1<\rho^{(1)}_{t-n,t}<0<\rho^{(1)}_{t-m,t}$ または $-1<\rho^{(1)}_{t-m,t}<0<\rho^{(1)}_{t-n,t}$ のケース

つぎに，$-1<\rho^{(1)}_{t-n,t}<0<\rho^{(1)}_{t-m,t}$ または $-1<\rho^{(1)}_{t-m,t}<0<\rho^{(1)}_{t-n,t}$ のとき，$\delta^{(1)}_{m,n}=0$ となる条件を考える。そのとき(3.1)式から，(3.7)式となる。

$$P_{t-n-1}=\frac{P_tP^{n/m}_{t-m-1}}{\left(2P^{1/m}_{t-m-1}-P^{1/m}_t\right)^n},\qquad P_{t-m-1}=\frac{P_tP^{m/n}_{t-n-1}}{\left(2P^{1/n}_{t-n-1}-P^{1/n}_t\right)^m}\tag{3.7}$$

ここで，(3.7)式の左辺が非負であるための条件は右辺分母がゼロより大きい条件(3.8)式である。

$$\rho^{(1)}_{t-m,t}<2^m-1,\qquad \rho^{(1)}_{t-n,t}<2^n-1\tag{3.8}$$

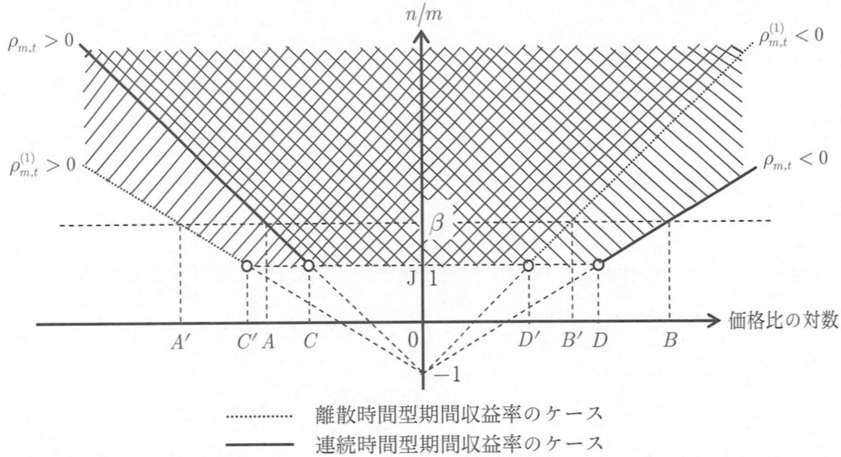
(3.7)式を１プラス m 期間収益率に対する１プラス n 期間収益率，あるいは時点 $t-n-1$ の資産価格に対する時点 $t-m-1$ の資産価格の比に代入すると，(3.9)式となる。

$$\begin{aligned}\frac{P_{t-m-1}}{P_{t-n-1}}&=\frac{P_t/P_{t-n-1}}{P_t/P_{t-m-1}}=\frac{\left\{2-\left(1+\rho^{(1)}_{t-m,t}\right)^{1/m}\right\}^n}{1+\rho^{(1)}_{t-m,t}}=\exp\left(-\rho_{t-m,t}\right)\left\{2-\exp\left(\frac{\rho_{t-m,t}}{m}\right)\right\}^n\\&=\frac{1+\rho^{(1)}_{t-n,t}}{\left\{2-\left(1+\rho^{(1)}_{t-n,t}\right)^{1/n}\right\}^m}=\frac{\exp\left(\rho_{t-n,t}\right)}{\left\{2-\exp\left(\rho_{t-n,t}/n\right)\right\}^m}\end{aligned}\tag{3.9}$$

(3.9)式を n について解くと，$\delta^{(1)}_{m,n}=0$ を満足する条件下で，期間比 n と価格比 P_{t-m-1}/P_{t-n-1} の関係(3.10)式が成立する。

$$n=\frac{\ln\left(P_{t-m-1}/P_{t-n-1}\right)+\ln\left(1+\rho^{(1)}_{t-m,t}\right)}{\ln\left\{2-\left(1+\rho^{(1)}_{t-m,t}\right)^{1/m}\right\}}=\frac{\ln\left(P_{t-m-1}/P_{t-n-1}\right)+\rho_{t-m,t}}{\ln\left\{2-\exp\left(\rho_{t-m,t}/m\right)\right\}}>m\tag{3.10}$$

ここで，$m<n$ の仮定により，(3.10)式は m より大きい範囲で成立しなければならない。期間 m（≥ 1）を所与として，m で(3.10)式の両辺を割ると(3.11)式となる。

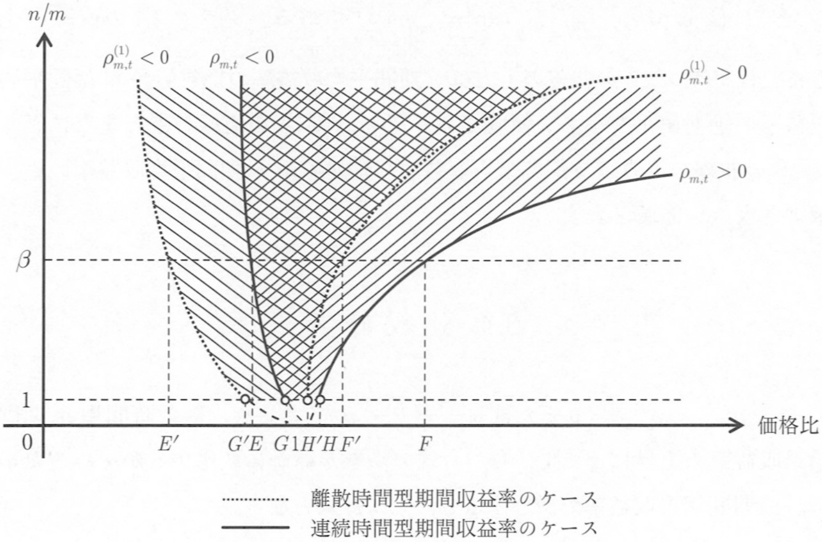


グラフ 2A：$\left|R^{(1)}_{t-n,t}\right| = \left|R^{(1)}_{t-m,t}\right|$ を満足する直線（$-1<\rho^{(1)}_{n,t}<0<\rho^{(1)}_{m,t}$ または $-1<\rho^{(1)}_{m,t}<0<\rho^{(1)}_{n,t}$ のケース）

$$\left.\frac{n}{m}\right|_{m=given} = \left.\frac{\ln\left(P_{t-m-1}/P_{t-n-1}\right)+\ln\left(1+\rho^{(1)}_{t-m,t}\right)}{m\ln\left\{2-\left(1+\rho^{(1)}_{t-m,t}\right)^{1/m}\right\}}\right|_{m=given}$$
$$= \left.\frac{\ln\left(P_{t-m-1}/P_{t-n-1}\right)+\rho_{t-m,t}}{m\ln\left\{2-\exp\left(\rho_{t-m,t}/m\right)\right\}}\right|_{m=given} \qquad (3.11)$$

(3.11)式の左辺が各右辺より大きい場合には n 期間平均収益率の絶対値が m 期間平均収益率の絶対値より大きいケースであり，左辺が各右辺より小さい場合には n 期間平均収益率の絶対値が m 期間平均収益率の絶対値より小さいケースである。また，m 期間収益率の絶対値が n 期間収益率の絶対値より大きいときには，n 期間平均収益率の絶対値が m 期間平均収益率の絶対値より大きい可能性がゼロとなるため考慮の必要はない。

(3.11)式を描いたものがグラフ 2A とグラフ 2B であり，グラフ 2A の横



グラフ 2B：$\left|R^{(1)}_{t-n,t}\right| = \left|R^{(1)}_{t-m,t}\right|$ を満足する曲線（$-1<\rho^{(1)}_{n,t}<0<\rho^{(1)}_{m,t}$ または $-1<\rho^{(1)}_{m,t}<0<\rho^{(1)}_{n,t}$ のケース）

軸は価格比の対数であるが，グラフ 2B の横軸は価格比であり，$m<n$ 仮定により，$n/m>1$ の範囲であり，$n/m=1$ は含まない。ここで，グラフ内の価格比は P_{t-m-1}/P_{t-n-1}，$\rho^{(1)}_{n}$ は $\rho^{(1)}_{t-n,t}$，$\rho^{(1)}_{m}$ は $\rho^{(1)}_{t-m,t}$，$R^{(1)}_{n}$ は $R^{(1)}_{t-n,t}$，$R^{(1)}_{m}$ は $R^{(1)}_{t-m,t}$ で表示し，ρ_m は離散時間型 m 期間収益率を連続時間型 m 期間収益率と勘違いしたときの価格比と n/m の関係を表している。グラフ 2 の A と B は $-\rho_{t-m,t} - n\ln\left\{2-\exp\left(\rho_{t-m,t}/m\right)\right\}$，$A'$ と B' は $n\ln\left\{2-\left(1+\rho^{(1)}_{t-m,t}\right)^{1/m}\right\} - \ln\left(1+\rho^{(1)}_{t-m,t}\right)$，$C$ と D は $-\rho_{t-m,t} - m\ln\left\{2-\exp\left(\rho_{t-m,t}/m\right)\right\}$，$C'$ と D' は $m\ln\left\{2-\left(1+\rho^{(1)}_{t-m,t}\right)^{1/m}\right\} - \ln\left(1+\rho^{(1)}_{t-m,t}\right)$，$E$ と F は $\exp\left(-\rho_{t-m,t}\right)\Big/\left\{2-\exp\left(\rho_{t-m,t}/m\right)\right\}^{n}$，$E'$ と F' は $\left\{2-\left(1+\rho^{(1)}_{t-m,t}\right)^{1/m}\right\}^{n}\Big/\left(1+\rho^{(1)}_{t-m,t}\right)$，$G$ と H は $\exp\left(-\rho_{t-m,t}\right)\Big/\left\{2-\exp\left(\rho_{t-m,t}/m\right)\right\}^{m}$，

G' と H' は $\exp\left(-\rho_{t-m,t}\right)\Big/\left\{2-\exp\left(\rho_{t-m,t}/m\right)\right\}^m$ である。グラフ 2A の直線の上方またはグラフ 2B の曲線の上方は n 期間平均収益率の絶対値が m 期間平均収益率の絶対値より小さい領域であり，グラフ 2A の直線の下方またはグラフ 2B の曲線の下方は n 期間平均収益率の絶対値が m 期間平均収益率の絶対値より大きい領域を表す。

3.4　比較静学

$-1<\rho^{(1)}_{t-n,t}<\rho^{(1)}_{t-m,t}<0$ または $0<\rho^{(1)}_{t-m,t}<\rho^{(1)}_{t-n,t}$ のとき，離散時間型 m 期間相乗収益率の上昇によって，(3.4a)式の傾きがいかに変化するかをみるために，m 期間相乗収益率で微分すると，(3.12)式となる。

$$\frac{d}{d\rho^{(1)}_{t-m,t}}\left(\frac{n}{m}\right)=-\frac{\ln\left(P_{t-m-1}/P_{t-n-1}\right)}{\left\{\ln\left(1+\rho^{(1)}_{t-m,t}\right)\right\}^2} \tag{3.12}$$

ここで，$-1<\rho^{(1)}_{t-n,t}<\rho^{(1)}_{t-m,t}<0$ のとき，$P_{t-n-1}<P_{t-m-1}$ であることから，(3.12)式の右辺分子は正であり，(3.12)式は負である。また，$0<\rho^{(1)}_{t-m,t}<\rho^{(1)}_{t-n,t}$ のとき，$P_{t-m-1}<P_{t-n-1}$ であることから，(3.12)式の右辺分子は負であり，(3.12)式は正である。よって，$\rho^{(1)}_{t-m,t}$ の上昇によって，グラフ 1A の直線は $n/m=1$，グラフ 1B の曲線は $n/m=$ 価格比 $=1$ を通って，傾きが急になる。

また，$n/m>1$ の範囲で $-1<\rho^{(1)}_{t-n,t}<0<\rho^{(1)}_{t-m,t}$ または $-1<\rho^{(1)}_{t-m,t}<0<\rho^{(1)}_{t-n,t}$ のとき，期間 $m\,(\geq 1)$ を所与として，(3.9)式を m 期間相乗収益率で微分すると，(3.13)式となる。

$$\left.\frac{dn}{d\rho^{(1)}_{t-m,t}}\right|_{m=given}=\left.\frac{2m+(n-m)\left(1+\rho^{(1)}_{t-m,t}\right)^{1/m}}{\left(1+\rho^{(1)}_{t-m,t}\right)\ln\left\{2-\left(1+\rho^{(1)}_{t-m,t}\right)^{1/m}\right\}}\right|_{m=given} \tag{3.13}$$

ここで，(3.8)式より，(3.13)式の右辺分子は正であり，$-1<\rho^{(1)}_{t-n,t}<0<\rho^{(1)}_{t-m,t}$

のとき，右辺分母は負であるので，(3.13)式は負である。また，$-1<\rho^{(1)}_{t-m,t}<0<\rho^{(1)}_{t-n,t}$ のとき，右辺分母は正であり，(3.13)式は正である。よって，$\rho^{(1)}_{t-m,t}$ の上昇によって，グラフ2Aの直線は $n/m=-1$，グラフ2Bの曲線は価格比 $=1$ を通って，傾きが緩やかになる。

4. 期間が異なるヒストリカル・アヴェレッジ・リターンと期待収益率の大きさの一致条件

4.1 ヒストリカル・アヴェレッジ・リターンと期待収益率のケース

つぎに，期間が異なるヒストリカル・アヴェレッジ・リターンと期待収益率である場合，$1\leq m<n$ の仮定の下で，$R^{(1)}_{t-m,t}$ と $\widetilde{R}^{(1)}_{t,t+n}$ の大小関係を考えるため，$\tilde{\delta}^{(1)}_{m,n}$ を(4.1)式のように定義する。

$$\tilde{\delta}^{(1)}_{m,n}\equiv\left|R^{(1)}_{t-m,t}\right|-\left|\widetilde{R}^{(1)}_{t+1,t+n}\right|=\left|\left(\frac{P_t}{P_{t-m-1}}\right)^{1/m}-1\right|-\left|\left(\frac{\tilde{P}_{t+n}}{P_t}\right)^{1/n}-1\right| \tag{4.1}$$

次項では，$\tilde{\delta}^{(1)}_{m,n}=0$ となる条件を考える。

4.2 $-1<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}<\rho^{(1)}_{t-m,t}<0$ または $0<\rho^{(1)}_{t-m,t}<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}$ のケース

まず，期間収益率 $\rho^{(1)}_{t-m,t}$ と $\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}$ の関係が $-1<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}<\rho^{(1)}_{t-m,t}<0$ または $0<\rho^{(1)}_{t-m,t}<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}$ のケースで $\tilde{\delta}^{(1)}_{m,n}=0$ となる条件を考える。そのとき(4.1)式から，(4.2)式となる。

$$\widetilde{P}_{t+n}=P_t^{1+n/m}\Big/P_{t-m-1}^{n/m} \tag{4.2}$$

(4.2)式の両辺を P_t で割ると，(4.3)式となる。

$$\widetilde{P}_{t+n}/P_t = \left(1+\rho^{(1)}_{t-m,t}\right)^{n/m} = 1+\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n} = \exp\left(n\rho_{t-m,t}/m\right) = \exp\left(\tilde{\rho}_{t+1,t+n}\right) \quad (4.3)$$

ここで，(4.3)式を n/m について解くと，$\tilde{\delta}^{(1)}_{m,n}=0$ を満足する条件下で，期間比 n/m と価格比 $\widetilde{P}_{t+n}/P_t$ の関係(4.4)式が成立する。

$$\frac{n}{m} = \frac{\ln\left(\widetilde{P}_{t+n}/P_t\right)}{\ln\left(1+\rho^{(1)}_{t-m,t}\right)} = \frac{\ln\left(1+\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}\right)}{\ln\left(1+\rho^{(1)}_{t-m,t}\right)} = \frac{\ln\left(\widetilde{P}_{t+n}/P_t\right)}{\rho_{t-m,t}} = \frac{\tilde{\rho}_{t+1,t+m}}{\rho_{t-m,t}} \quad (4.4a)$$

$$\frac{m}{n} = \frac{\ln\left(1+\rho^{(1)}_{t-m,t}\right)}{\ln\left(\widetilde{P}_{t+n}/P_t\right)} = \frac{\ln\left(1+\rho^{(1)}_{t-m,t}\right)}{\ln\left(1+\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}\right)} = \frac{\rho_{t-m,t}}{\ln\left(\widetilde{P}_{t+n}/P_t\right)} = \frac{\rho_{t-m,t}}{\tilde{\rho}_{t+1,t+m}} \quad (4.4b)$$

(4.4a)式を描いたものがグラフ 1A とグラフ 1B であり，グラフ 1A の横軸は価格比の対数，グラフ 1B の横軸は価格比であり，$m<n$ の仮定により，$n/m>1$ の範囲である。ここで，グラフ内の価格比は $\widetilde{P}_{t+n}/P_t$，$\rho^{(1)}_n$ は $\rho^{(1)}_{t+1,t+n}$，$\rho^{(1)}_m$ は $\rho^{(1)}_{t-m,t}$，$R^{(1)}_n$ は $R^{(1)}_{t+1,t+n}$，$R^{(1)}_m$ は $R^{(1)}_{t-m,t}$ で表示し，ρ_m は連続時間型 m 期間収益率としたときの価格比と n/m の関係を表している。グラフ内の横軸のアルファベットは 3 節の記号を上述の記号で置換したものである。グラフ 1A の直線の上方またはグラフ 1B の曲線の上方は n 期間平均収益率の絶対値が m 期間平均収益率の絶対値より小さい領域であり，グラフ 1A の直線の下方またはグラフ 1B の曲線の下方は n 期間期待収益率の絶対値が m 期間平均収益率の絶対値より大きい領域を表す。

4.3　$-1<\tilde{\rho}^{(1)}_{t,t+n}<0<\rho^{(1)}_{t-m,t}$ または $-1<\rho^{(1)}_{t-m,t}<0<\tilde{\rho}^{(1)}_{t,t+n}$ のケース

つぎに，$-1<\tilde{\rho}^{(1)}_{t,t+n}<0<\rho^{(1)}_{t-m,t}$ または $-1<\rho^{(1)}_{t-m,t}<0<\tilde{\rho}^{(1)}_{t,t+n}$ のとき，$\delta^{(1)}_{m,n}=0$ となる条件を考える。そのとき(4.1)式から，(4.5)式となる。

$$\widetilde{P}_{t+n} = \frac{P_t\left(2P^{1/m}_{t-m-1}-P^{1/m}_t\right)^n}{P^{n/m}_{t-m-1}}, \qquad P_{t-m-1} = \frac{P^{1+m/n}_t}{\left(2P^{1/n}_t-\widetilde{P}^{1/n}_{t+n}\right)^m} \quad (4.5)$$

ここで，(4.5)式の左辺が非負であるための条件は右辺の括弧内がゼロより大きい条件であり，(3.8)式となる。(4.5)式の両辺を P_t で割ると，(4.6)式となる。

$$\frac{\widetilde{P}_{t+n}}{P_t}=\left\{2-\left(\frac{P_t}{P_{t-m-1}}\right)^{1/m}\right\}^n=\left\{2-\left(1+\rho^{(1)}_{t-m,t}\right)^{1/m}\right\}^n=\left\{2-\exp\left(\rho_{t-m,t}\,/\,m\right)\right\}^n \tag{4.6}$$

(4.6)式を n について解くと，$\tilde{\delta}^{(1)}_{m,n}=0$ を満足する条件下で，期間比 n と価格比 P_t/P_{t-m-1} の関係(4.7)式が成立する。

$$n=\frac{\ln\left(\widetilde{P}_{t+n}/P_t\right)}{\ln\left\{2-\left(P_t/P_{t-m-1}\right)^{1/m}\right\}}=\frac{\ln\left(\widetilde{P}_{t+n}/P_t\right)}{\ln\left\{2-\left(1+\rho^{(1)}_{t-m,t}\right)^{1/m}\right\}}=\frac{\ln\left(\widetilde{P}_{t+n}/P_t\right)}{\ln\left\{2-\exp\left(\rho_{t-m,t}\,/\,m\right)\right\}}>m \tag{4.7}$$

ここで，$m<n$ の仮定により，(4.7)式は m より大きい範囲で成立しなければならない。期間 $m\ (\geq 1)$ を所与として，m で(4.7)式の両辺を割ると(4.8)式となる。

$$\left.\frac{n}{m}\right|_{m=given}=\left.\frac{\ln\left(\widetilde{P}_{t+n}/P_t\right)}{m\ln\left\{2-\left(P_t/P_{t-m-1}\right)^{1/m}\right\}}\right|_{m=given}=\left.\frac{\ln\left(\widetilde{P}_{t+n}/P_t\right)}{m\ln\left\{2-\left(1+\rho^{(1)}_{t-m,t}\right)^{1/m}\right\}}\right|_{m=given}$$
$$=\left.\frac{\ln\left(\widetilde{P}_{t+n}/P_t\right)}{m\ln\left\{2-\exp\left(\rho_{t-m,t}/m\right)\right\}}\right|_{m=given} \tag{4.8}$$

(4.8)式の左辺が各右辺より大きい場合には n 期間収益率の絶対値が m 期間収益率の絶対値より大きいケースであり，左辺が各右辺より小さい場合には n 期間収益率の絶対値が期間収益率の絶対値より小さいケースである。ここで，グラフ内の価格比は $\widetilde{P}_{t+n}/P_t$，$\rho^{(1)}_n$ は $\rho^{(1)}_{t+1,t+n}$，$\rho^{(1)}_m$ は $\rho^{(1)}_{t-m,t}$，$R^{(1)}_n$ は $R^{(1)}_{t+1,t+n}$，$R^{(1)}_m$ は $R^{(1)}_{t-m,t}$ をで表示し，ρ_m は離散時間型期間収益率を連続時間型 m 期間収益率と勘違いしたときの価格比と n/m の関係を表している。グラフ

2 の A と B は$-n\ln\left\{2-\exp\left(\rho_{t-m,t}/m\right)\right\}$，$A'$ と B' は $n\ln\left\{2-\left(1+\rho_{t-m,t}^{(1)}\right)^{1/m}\right\}$，

C と D は $-m\ln\left\{2-\exp\left(\rho_{t-m,t}/m\right)\right\}$，$C'$ と D' は $m\ln\left\{2-\left(1+\rho_{t-m,t}^{(1)}\right)^{1/m}\right\}$，

E と F は $\left\{2-\exp\left(\rho_{t-m,t}/m\right)\right\}^{n}$，$E'$ と F' は $\left\{2-\left(1+\rho_{t-m,t}^{(1)}\right)^{1/m}\right\}^{n}$，$G$ と H は $\left\{2-\exp\left(\rho_{t-m,t}/m\right)\right\}^{m}$，$G'$ と H' は $\left\{2-\left(1+\rho_{t-m,t}^{(1)}\right)^{1/m}\right\}^{m}$ である。(4.8)式を描いたものがグラフ 2A とグラフ 2B であり，グラフ 2A の横軸は価格比の対数，グラフ 2B の横軸は価格比であり，$m<n$ 仮定により，$n/m>1$ の範囲であり，$n/m=1$ は含まない。

4.4 比較静学

$-1<\tilde{\rho}_{t+1,t+n}^{(1)}<\rho_{t-m,t}^{(1)}<0$ または $0<\rho_{t-m,t}^{(1)}<\tilde{\rho}_{t+1,t+n}^{(1)}$ のとき，離散時間型 m 期間相乗収益率の上昇によって，(4.4a)式の傾きがいかに変化するかをみるために，m 期間相乗収益率で微分すると，(4.9)式となる。

$$\frac{d}{d\rho_{t-m,t}^{(1)}}\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{\ln\left(\widetilde{P}_{t+n}/P_{t}\right)}{\left\{\ln\left(1+\rho_{t-m,t}^{(1)}\right)\right\}^{2}} \tag{4.9}$$

ここで，$-1<\tilde{\rho}_{t+1,t+n}^{(1)}<\rho_{t-m,t}^{(1)}<0$ のとき，$\widetilde{P}_{t+n}<P_{t}$ であることから，(4.9)式の右辺分子は負であり，(4.9)式は正である。また，$0<\rho_{t-m,t}^{(1)}<\tilde{\rho}_{t+1,t+n}^{(1)}$ のとき，$P_{t}<\widetilde{P}_{t+n}$ であることから，(4.9)式の右辺分子は正であり，(4.9)式は負である。よって，$\rho_{t-m,t}^{(1)}$ の上昇によって，グラフ 1A の直線は $n/m=1$，グラフ 1B の曲線は $n/m=$ 価格比 $=1$ を通って，傾きが緩やかになる。

また，$n/m>1$ の範囲で $-1<\tilde{\rho}_{t,t+n}^{(1)}<0<\rho_{t-m,t}^{(1)}$ または $-1<\rho_{t-m,t}^{(1)}<0<\tilde{\rho}_{t,t+n}^{(1)}$ のとき，期間 $m\,(\geq 1)$ を所与として，(4.7)式を m 期間相乗収益率で微分すると，(4.10)式となる。

$$\left.\frac{dn}{d\rho_{t-m,t}^{(1)}}\right|_{m=given} = \left.\frac{\left(1+\rho_{t-m,t}^{(1)}\right)^{1/m-1}\ln\left(1+\rho_{t-m,t}^{(1)}\right)}{m\left\{2-\left(1+\rho_{t-m,t}^{(1)}\right)^{1/m}\right\}\left[\ln\left\{2-\left(1+\rho_{t-m,t}^{(1)}\right)^{1/m}\right\}\right]^2}\right|_{m=given} \tag{4.10}$$

ここで，(4.7)式より，(4.10)式の右辺分子は正であり，$-1<\tilde{\rho}_{t,t+n}^{(1)}<0<\rho_{t-m,t}^{(1)}$ のとき，右辺分母は負であるので，(4.10)式は負である。また，$-1<\rho_{t-m,t}^{(1)}<0<\tilde{\rho}_{t,t+n}^{(1)}$ のとき，右辺分母は正であり，(4.10)式は正である。よって，$\rho_{t-m,t}^{(1)}$ の上昇によって，グラフ2Aの直線は $n/m=-1$，グラフ2Bの曲線は価格比 $=1$ を通って，傾きが緩やかになる。

5. 期間が異なる2種類の期待収益率の大きさの一致条件

5.1 両平均収益率が期待収益率のケース

最後に，期間が異なる2種類の期待収益率である場合，$1\leq m<n$ の仮定の下で，$\widetilde{R}_{t+1,t+m}^{(1)}$ と $\widetilde{R}_{t+1,t+n}^{(1)}$ の大小関係を考えるため，$\tilde{\delta}_{m,n}^{(1)}$ を(5.1)式のように定義する。

$$\tilde{\delta}_{m,n}^{(1)} \equiv \left|\widetilde{R}_{t+1,t+m}^{(1)}\right| - \left|\widetilde{R}_{t+1,t+n}^{(1)}\right| = \left|\left(\frac{\widetilde{P}_{t+m}}{P_t}\right)^{1/m}-1\right| - \left|\left(\frac{\widetilde{P}_{t+n}}{P_t}\right)^{1/n}-1\right| \tag{5.1}$$

次項では，$\tilde{\delta}_{m,n}^{(1)}=0$ となる条件を考える。

5.2 $-1<\tilde{\rho}_{t+1,t+n}^{(1)}<\tilde{\rho}_{t+1,t+m}^{(1)}<0$ または $0<\tilde{\rho}_{t+1,t+m}^{(1)}<\tilde{\rho}_{t+1,t+n}^{(1)}$ のケース

まず，$\tilde{\rho}_{t+1,t+m}^{(1)}$ と $\tilde{\rho}_{t+1,t+n}^{(1)}$ の関係が $-1<\tilde{\rho}_{t+1,t+n}^{(1)}<\tilde{\rho}_{t+1,t+m}^{(1)}<0$ または $0<$

$\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+m} < \tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}$ のケースの $\tilde{\delta}^{(1)}_{m,n} = 0$ となる条件を考える。そのとき(5.1)式から，(5.2)式となる。

$$\widetilde{P}_{t+n} = \widetilde{P}^{n/m}_{t+m} P^{1-n/m}_{t}, \qquad \widetilde{P}_{t+m} = P^{m/n-1}_{t} \Big/ \widetilde{P}^{m/n}_{t+n} \tag{5.2}$$

(5.2)式を1プラス m 期間収益率に対する1プラス n 期間収益率，あるいは時点 $t+m$ の資産価格と時点 $t+n$ の資産価格の比に代入すると，(5.3)式となる。

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{P}_{t+n}}{\widetilde{P}_{t+m}} &= \frac{\widetilde{P}_{t+n}\big/P_t}{\widetilde{P}_{t+m}\big/P_t} = \left(\frac{\widetilde{P}_{t+m}}{P_t}\right)^{n/m-1} = \left(\frac{\widetilde{P}_{t+n}}{P_t}\right)^{1-m/n} \\ &= \left(1+\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+m}\right)^{n/m-1} = \left(1+\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}\right)^{1-m/n} \\ &= \exp\left\{\tilde{\rho}_{t+1,t+m}\left(\frac{n}{m}-1\right)\right\} = \exp\left\{\tilde{\rho}_{t+1,t+n}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right\}\end{aligned} \tag{5.3}$$

ここで， $\tilde{\rho}_{t+1,t+m}$ は時点 $t+1$ から時点 $t+m$ までの連続時間型 m 期間収益率， $\tilde{\rho}_{t+1,t+n}$ は時点 $t+1$ から時点 $t+n$ までの連続時間型 n 期間収益率を表す。(5.3)式を n/m について解くと， $\tilde{\delta}^{(1)}_{m,n} = 0$ を満足する条件下で，期間比 n/m と価格比 $\widetilde{P}_{t+n}\big/\widetilde{P}_{t+m}$ の関係(5.4)式が成立する。

$$\frac{n}{m} = 1 + \frac{\ln\left(\widetilde{P}_{t+n}\big/\widetilde{P}_{t+m}\right)}{\ln\left(1+\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+m}\right)} = 1 + \frac{\ln\left(\widetilde{P}_{t+n}\big/\widetilde{P}_{t+m}\right)}{m\ln\left(1+\widetilde{R}^{(1)}_{t+1,t+m}\right)} = 1 + \frac{\ln\left(\widetilde{P}_{t+n}\big/\widetilde{P}_{t+m}\right)}{\tilde{\rho}_{t+1,t+m}} > 1 \tag{5.4a}$$

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{\ln\left(\widetilde{P}_{t+m}\big/\widetilde{P}_{t+n}\right)}{\ln\left(1+\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}\right)} = 1 + \frac{\ln\left(\widetilde{P}_{t+m}\big/\widetilde{P}_{t+n}\right)}{n\ln\left(1+\widetilde{R}^{(1)}_{t+1,t+n}\right)} = 1 + \frac{\ln\left(\widetilde{P}_{t+m}\big/\widetilde{P}_{t+n}\right)}{\tilde{\rho}_{t+1,t+n}} < 1 \tag{5.4b}$$

ここで，$m<n$ の仮定により，(5.4a)式は1より大きい。(5.4a)式の右辺が1になる条件は $\widetilde{P}_{t+n} = \widetilde{P}_{t+m}$ のときであり，この条件は本節の前提条件より除外されている。 $\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}$ と $\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+m}$ が負のとき，(5.4a)式の右辺第2項の分子分母はともに負であるので，(5.4a)式は1より大きい。また， $\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}$ と

$\tilde{\rho}_{t+1,t+m}^{(1)}$ が正のときには，(5.4a)式の右辺第2項の分子分母はともに正であるので，(5.4a)式は1より大きい。

(5.4a)式を描いたものがグラフ1Aとグラフ1Bであり，グラフ1Aの横軸は価格比の対数であるが，グラフ1Bの横軸は価格比であり，$m<n$ 仮定により，$n/m>1$ の範囲である。ここで，グラフ内の価格比は $\widetilde{P}_{t+n}/\widetilde{P}_{t+m}$，$\rho_n^{(1)}$ は $\tilde{\rho}_{t+1,t+n}^{(1)}$，$\rho_m^{(1)}$ は $\tilde{\rho}_{t+1,t+m}^{(1)}$，$R_n^{(1)}$ は $\widetilde{R}_{t+1,t+n}^{(1)}$，$R_m^{(1)}$ は $\widetilde{R}_{t+1,t+m}^{(1)}$ を示し，ρ_m は離散時間型 m 期間収益率を連続時間型 m 期間収益率と勘違いしたときの価格比と n/m の関係を表している。グラフ1の A と B は $(\beta-1)\tilde{\rho}_{t+1,t+m}$，$A'$ と B' は $(\beta-1)\ln\left(1+\tilde{\rho}_{t+1,t+m}^{(1)}\right)$，$C$ と D は $\exp\left\{(\beta-1)\tilde{\rho}_{t+1,t+m}\right\}$，$C'$ と D' は $\left(1+\tilde{\rho}_{t+1,t+m}^{(1)}\right)^{\beta-1}$ である。グラフ1Aの直線の上方またはグラフ1Bの曲線の上方は n 期間平均収益率の絶対値が m 期間平均収益率の絶対値より小さい領域であり，グラフ1Aの直線の下方またはグラフ1Bの曲線の下方は n 期間期待収益率の絶対値が m 期間平均収益率の絶対値より大きい領域を表す。(4.4a)式の左辺が各右辺より大きい場合には n 期間平均収益率の絶対値が m 期間平均収益率の絶対値より大きいケースであり，左辺が各右辺より小さい場合には n 期間平均収益率の絶対値が m 期間平均収益率の絶対値より小さいケースである。

つぎに，(5.4a)式から，期間比 n/m を1より大きい任意の定数 β とするときの $\tilde{\delta}_{m,n}^{(1)}=0$ となる価格比を求めると，(5.5)式となる。

$$\frac{\widetilde{P}_{t+n}}{\widetilde{P}_{t+m}}=\left(\frac{\widetilde{P}_{t+m}}{P_t}\right)^{\beta-1}=\left(\frac{\widetilde{P}_{t+n}}{P_t}\right)^{1-1/\beta}=\left(1+\tilde{\rho}_{t+1,t+m}^{(1)}\right)^{\beta-1}=\left(1+\tilde{\rho}_{t+1,t+n}^{(1)}\right)^{1-1/\beta}$$
$$=\exp\left\{\tilde{\rho}_{t+1,t+m}(\beta-1)\right\}=\exp\left\{\tilde{\rho}_{t+1,t+n}\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\right\} \tag{5.5}$$

さらに，β が極限になった場合を考える。

$$\lim_{\beta\to\infty}\left(\widetilde{P}_{t+n}/\widetilde{P}_{t+m}\right)=1+\tilde{\rho}_{t+1,t+n}^{(1)}=\exp\left(\tilde{\rho}_{t+1,t+n}\right) \tag{5.6}$$

このとき，両平均収益率が一致するという条件の下で，期間比が無限大に

なったときには，価格比 $\widetilde{P}_{t+n}\big/\widetilde{P}_{t+m}$ は1プラス n 期間収益率となる。

5.3　$-1<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}<0<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+m}$ または $-1<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+m}<0<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}$ のケース

つぎに，$-1<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}<0<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+m}$ または $-1<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+m}<0<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}$ のとき，$\tilde{\delta}^{(1)}_{m,n}=0$ となる条件を考える。そのとき(5.1)式から，(5.7)式となる。

$$\widetilde{P}_{t+n}=\frac{P_t\left(2P_t^{1/m}-\widetilde{P}_{t+m}^{1/m}\right)^n}{P_t^{n/m}}\geq 0,\quad \widetilde{P}_{t+m}=\frac{P_t\left(2P_t-\widetilde{P}_{t+n}^{1/n}\right)^m}{P_t^{m/n}}\geq 0 \tag{5.7}$$

ここで，(5.7)式の左辺が非負であるための条件は右辺分子がゼロより大きい条件(5.8)式である。

$$\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+m}<2^m-1,\qquad \tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}<2^n-1 \tag{5.8}$$

(5.7)式を時点 $t+m$ の資産価格に対する時点 $t+n$ の資産価格の比に代入すると，(5.9)式となる。

$$\frac{\widetilde{P}_{t+n}}{\widetilde{P}_{t+m}}=\frac{\widetilde{P}_{t+n}\big/P_t}{\widetilde{P}_{t+m}\big/P_t}=\frac{\left\{2-\left(1+\tilde{\rho}^{(1)}_{t,t+m}\right)^{1/m}\right\}^n}{1+\tilde{\rho}^{(1)}_{t,t+m}}=\exp\left(-\rho_{t,t+m}\right)\left\{2-\exp\left(\frac{\tilde{\rho}_{t,t+m}}{m}\right)\right\}^n \tag{5.9}$$

(5.9)式を n について解くと(5.10)式となり，$\tilde{\delta}^{(1)}_{m,n}=0$ を満足する条件下で，期間比 n と価格比 $\widetilde{P}_{t+n}\big/\widetilde{P}_{t+m}$ の関係式が成立する。

$$n=\frac{\ln\left(\widetilde{P}_{t+n}\big/\widetilde{P}_{t+m}\right)+\ln\left(1+\tilde{\rho}^{(1)}_{t,t+m}\right)}{\ln\left\{2-\left(1+\tilde{\rho}^{(1)}_{t,t+m}\right)^{1/m}\right\}}=\frac{\ln\left(\widetilde{P}_{t+n}\big/\widetilde{P}_{t+m}\right)+\tilde{\rho}_{t,t+m}}{\ln\left\{2-\exp\left(\tilde{\rho}_{t,t+m}/m\right)\right\}}>m \tag{5.10}$$

ここで，$m<n$ の仮定により，(5.10)式は m より大きい範囲で成立しなければならない。期間 m (≥ 1) を所与として，m で(5.10)式の両辺を割ると(5.11)式となる。

$$\left.\frac{n}{m}\right|_{m=given}$$

$$=\left.\frac{\ln\left(\widetilde{P}_{t+n}\big/\widetilde{P}_{t+m}\right)+\ln\left(1+\tilde{\rho}^{(1)}_{t,t+m}\right)}{m\ln\left\{2-\left(1+\tilde{\rho}^{(1)}_{t,t+m}\right)^{1/m}\right\}}\right|_{m=given}=\left.\frac{\ln\left(\widetilde{P}_{t+n}\big/\widetilde{P}_{t+m}\right)+\tilde{\rho}_{t,t+m}}{m\ln\left\{2-\exp\left(\tilde{\rho}_{t,t+m}/m\right)\right\}}\right|_{m=given}>1 \tag{5.11}$$

(5.11)式の左辺が各右辺より大きい場合には n 期間平均収益率の絶対値が m 期間平均収益率の絶対値より大きいケースであり，左辺が各右辺より小さい場合には n 期間平均収益率の絶対値が m 期間平均収益率の絶対値より小さいケースである。

(5.11)式を描いたものがグラフ2Aとグラフ2Bであり，グラフ2Aの横軸は価格比の対数，グラフ2Bの横軸は価格比であり，$m<n$ の仮定により，$n/m>1$ の範囲であり，$n/m=1$ は含まない。ここで，グラフ内の価格比は $\widetilde{P}_{t+n}\big/\widetilde{P}_{t+m}$，$\rho^{(1)}_{n}$ は $\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}$，$\rho^{(1)}_{m}$ は $\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+m}$，$R^{(1)}_{n}$ は $\widetilde{R}^{(1)}_{t+1,t+n}$，$R^{(1)}_{m}$ は $\widetilde{R}^{(1)}_{t+1,t+m}$ で表示し，ρ_m は離散時間型 m 期間収益率を連続時間型 m 期間収益率と勘違いしたときの価格比と n/m の関係を表している。グラフ2の A と B は $-\tilde{\rho}_{t,t+m}-n\ln\left\{2-\exp\left(\tilde{\rho}_{t,t+m}/m\right)\right\}$，$A'$ と B' は $n\ln\left\{2-\left(1+\tilde{\rho}^{(1)}_{t,t+m}\right)^{1/m}\right\}-\ln\left(1+\tilde{\rho}^{(1)}_{t,t+m}\right)$，$C$ と D は $-\tilde{\rho}_{t,t+m}-m\ln\left\{2-\exp\left(\tilde{\rho}_{t,t+m}/m\right)\right\}$，$C'$ と D' は $m\ln\left\{2-\left(1+\tilde{\rho}^{(1)}_{t,t+m}\right)^{1/m}\right\}-\ln\left(1+\tilde{\rho}^{(1)}_{t,t+m}\right)$，$E$ と F は $\exp\left(-\tilde{\rho}_{t,t+m}\right)\big/\left\{2-\exp\left(\tilde{\rho}_{t,t+m}/m\right)\right\}^{n}$，$E'$ と F' は $\left\{2-\left(1+\tilde{\rho}^{(1)}_{t,t+m}\right)^{1/m}\right\}^{n}\big/\left(1+\tilde{\rho}^{(1)}_{t,t+m}\right)$，$G$ と H は $\exp\left(-\tilde{\rho}_{t,t+m}\right)\big/\left\{2-\exp\left(\tilde{\rho}_{t,t+m}/m\right)\right\}^{m}$，$G'$ と H' は $\left\{2-\left(1+\tilde{\rho}^{(1)}_{t,t+m}\right)^{1/m}\right\}^{m}\big/\left(1+\tilde{\rho}^{(1)}_{t,t+m}\right)$ である。グラフ2Aの直線の上方またはグラフ2Bの曲線の上方は n 期間平均収益率の絶対値が m 期間平均収益率の絶対値より小さい領域であり，グラフ2Aの直線の下方またはグラフ2Bの曲線の下方は n 期間平均収益率の絶対値が m 期間平均収益率の絶対値より大きい領域を表す。

5.4　比較静学

$-1<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+m}<0$ または $0<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+m}<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}$ のとき，離散時間型 m 期間相乗収益率の上昇によって，(5.4a)式の傾きがいかに変化するかをみるために，m 期間相乗収益率で微分すると，(5.12)式となる。

$$\frac{d}{d\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+m}}\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{\ln\left(\widetilde{P}_{t+n}/\widetilde{P}_{t+m}\right)}{\left\{\ln\left(1+\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+m}\right)\right\}^{2}} \tag{5.12}$$

ここで，$-1<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+m}<0$ のとき，$\widetilde{P}_{t+n}<\widetilde{P}_{t+m}$ であることから，(5.12)式の右辺分子は負であり，(5.12)式は正である。また，$0<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+m}<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}$ のとき，$\widetilde{P}_{t+m}<\widetilde{P}_{t+n}$ であることから，(5.12)式の右辺分子は正であり，(5.12)式は負である。よって，$\rho^{(1)}_{t+1,t+m}$ の上昇によって，グラフ1Aの直線は $n/m=1$，グラフ1Bの曲線は $n/m=$ 価格比 $=1$ を通って，傾きが緩やかになる。

また，$-1<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}<0<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+m}$ または $-1<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+m}<0<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}$ のとき，期間 $m\ (\geq 1)$ を所与として，(5.9)式を m 期間相乗収益率で微分すると，(5.13)式となる。

$$\left.\frac{dn}{d\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+m}}\right|_{m=given}=\left.\frac{2m+(n-m)\left(1+\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+m}\right)^{1/m}}{\left(1+\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+m}\right)\ln\left\{2-\left(1+\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+m}\right)^{1/m}\right\}}\right|_{m=given} \tag{5.13}$$

ここで，(5.13)式の右辺分子は正であり，$-1<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}<0<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+m}$ のとき，右辺分母は負であるので，(5.13)式は負である。また，$-1<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+m}<0<\tilde{\rho}^{(1)}_{t+1,t+n}$ のとき，右辺分母は正であり，(5.13)式は正である。よって，$\rho^{(1)}_{t-m,t}$ の上昇によって，グラフ1Aの直線は $n/m=-1$，グラフ1Bの曲線は価格比 $=1$ を通って，傾きが緩やかになる。

6. 投資家のための投資戦略

この節では，期待収益率が正規分布に従う場合に，投資家が時点 t で1危険資産の売買を考えて，時点 $t+m$ で資産価格の実現値を確認した上で，時点 t で実行した売買を再検討して，反対売買を行って取引を終了するか，あるいは時点 $t+n$ まで意思決定を変更しないかのどちらかに限って論じる。実際には，時点 $t+m$ で時点 t での意思決定の誤りを確認して，再度投資決定を行うことができるはずであるが，本稿では，時点 $t+m$ で取引を終了するか，あるいは継続するかに限ることにする。そのとき，投資家は時点 t での時点 $t+m$ と時点 $t+n$ での資産価格の大小関係のみの予想を行い，また，時点 $t+m$ では時点 $t+n$ での資産価格の上下のみの予想を行うものとする。また，この節では，各時点での価格に関する投資家の予想が的中した場合だけの投資成功確率を考察することにする。特に，時点 t での意思決定を時点 $t+n$ まで持ち越す場合には，時点 t あるいは時点 $t+m$ での価格の上下予想の一方だけが的中した場合でも，3時点の資産価格の大小関係によって，正の収益を得る可能性が存在するが，これらのケースは本稿では論じず，機会を得て考察するつもりである。

まず，次項では一方がヒストリカル・アヴェレッジ・リターンと他方が期待収益率のケースを想定する。すなわち，投資家が過去の平均収益率を確認してから投資決定を行うケースを考える。

6.1 一方がヒストリカル・アヴェレッジ・リターンと他方が期待収益率のケース

まず，投資家が1危険資産の時点 $t-m-1$ の資産価格 P_{t-m-1} と時点 t の

資産価格 P_t を観察して，時点 $t+n$ の資産価格 $\widetilde{P}_{t+n}$ を予想して，現時点（時点 t）で投資戦略を立てる。したがって，1危険資産を現時点で購入するか，空売りするかを決定する。ここで，時点 t から時点 $t+n$ の収益率 $\widetilde{R}_{t+1,t+n}$ は平均 $\mu_{t+1,t+m}$，分散 $\sigma^2_{t+1,t+n}$ の正規分布（ガウス分布）に従うものとする。すなわち，

$$\widetilde{R}_{t+1,t+n}\Big|\Omega_t \sim N\left(\mu_{t+1,t+n}, \sigma^2_{t+1,t+n}\right) \tag{6.1}$$

ここで，$\mu_{t+1,t+n}$ と $\sigma^2_{t+1,t+n}$ に関しては，投資家の主観的な値とする。つぎに，以下の投資戦略下で，正の収益を得る時点 t での確率を求める。なお，損失となる確率はこれ以降の注に挙げておく。

ケース1

ヒストリカル・アヴェレッジ・リターンに関係なく，時点 t で買って，時点 $t+n$ で売却するとき，正の収益 $\left(P_t < \widetilde{P}_{t+n}\right)$ となる時点 t での確率は(6.2)式である。

$$\Pr\left(P_t < \widetilde{P}_{t+n}\Big|\Omega_t\right) = \Pr\left(\widetilde{R}_{t+1,t+n} > 0\Big|\Omega_t\right) \tag{6.2}$$

ここで，$\Omega_t = \left\{P_t, P_{t-1}, \cdots\right\}$ を表し，$\Pr(\quad|\Omega_t)$ は Ω_t を条件とした時点 t での確率を表す。

ケース2

ヒストリカル・アヴェレッジ・リターンに関係なく，時点 t で空売りして，時点 $t+n$ で買戻すとき，正の収益 $\left(P_t > \widetilde{P}_{t+n}\right)$ となる時点 t での確率は(6.3)式である。

$$\Pr\left(\widetilde{P}_{t+n} < P_t\Big|\Omega_t\right) = \Pr\left(\widetilde{R}_{t+1,t+n} < 0\Big|\Omega_t\right) \tag{6.3}$$

ケース1とケース2の確率は0.5である[5)]。

ケース3

正のヒストリカル・アヴェレッジ・リターン$\left(R_{t-m,t}>0\right)$を観察して，時点tは天井でないと予想して$\left(\mu_{t+1,t+n}>0\right)$購入し，時点$t+n$で$P_t$より高値で売却するとき，正の収益$\left(P_{t-m-1}<P_t<\widetilde{P}_{t+n}\right)$となる時点$t$での確率[6)]は(6.4)式である。

$$\begin{aligned}
&\Pr\left(P_{t-m-1}<P_t<\widetilde{P}_{t+n}\middle|\Omega_t\right)\\
&\quad=\Pr\left(-\frac{R_{t-m-1,t}}{\beta}<0<\widetilde{R}_{t+1,t+n}\middle|R_{t-m-1,t}>0\ \&\ \mu_{t+1,t+n}>0\ \&\ \beta=\frac{n}{m}\right)\\
&\quad=\Pr\left(\widetilde{R}_{t+1,t+n}>0\middle|R_{t-m-1,t}>0\ \&\ \mu_{t+1,t+n}>0\right)
\end{aligned}\tag{6.4}$$

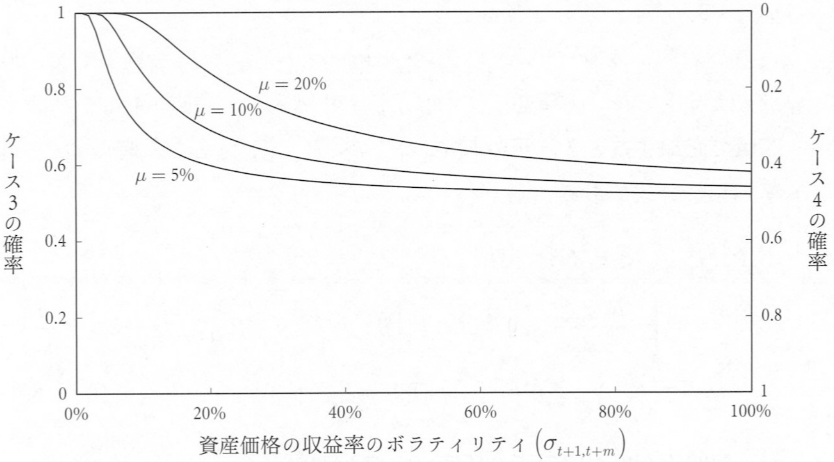
ここで，期間比を表すβを正の任意の定数とする。

ケース4

負のヒストリカル・アヴェレッジ・リターン$\left(R_{t-m,t}<0\right)$を観察して，時点tは底値でないと予想して$\left(\mu_{t+1,t+n}<0\right)$空売りし，時点$t+n$で$P_t$より安値で買戻すとき，正の収益$\left(\widetilde{P}_{t+n}<P_t<P_{t-m-1}\right)$となる確率[7)]は(6.5)式である。

$$\begin{aligned}
&\Pr\left(\widetilde{P}_{t+n}<P_t<P_{t-m-1}\middle|\Omega_t\right)\\
&\quad=\Pr\left(\widetilde{R}_{t+1,t+n}<0<-\frac{R_{t-m-1,t}}{\beta}\middle|R_{t-m-1,t}<0\ \&\ \mu_{t+1,t+n}<0\ \&\ \beta=\frac{n}{m}\right)\\
&\quad=\Pr\left(\widetilde{R}_{t+1,t+n}<0\middle|R_{t-m-1,t}<0\ \&\ \mu_{t+1,t+n}<0\right)\\
&\quad=1-\Pr\left(P_{t-m-1}<P_t<\widetilde{P}_{t+n}\middle|\Omega_t\right)
\end{aligned}\tag{6.5}$$

グラフ3は横軸に時点tでの$\widetilde{R}_{t+1,t+n}$のボラティリティ$\sigma_{t+1,t+n}$をとった(6.4)式と(6.5)式の確率を表している。グラフの左軸はケース3の投資戦略によって，正の収益を得る確率を表し，右軸はケース4の投資戦略によって，正の収益を得る確率を表している。



グラフ3：ケース3とケース4の確率

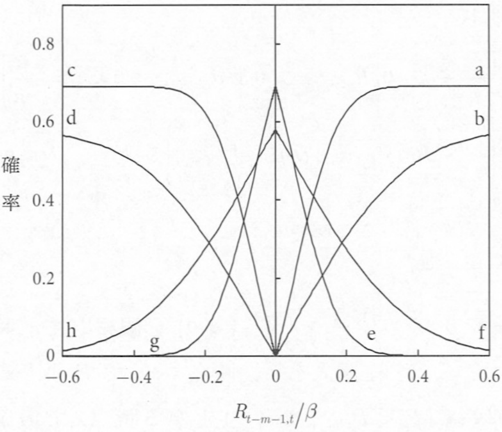
ケース5

正のヒストリカル・アヴェレッジ・リターン $\left(R_{t-m,t} > 0\right)$ を観察して，時点 t は天井だと予想して $\left(\mu_{t+1,t+n} < 0\right)$ 空売りをし，時点 $t+n$ で P_{t-m-1} より高値で，かつ P_t より安値で買戻すとき，正の収益 $\left(P_{t-m-1} < \widetilde{P}_{t+n} < P_t\right)$ となる時点 t での確率[8)]は(6.6)式である。

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left(P_{t-m-1} < \widetilde{P}_{t+n} < P_t \middle| \Omega_t\right) \\
&\quad = \Pr\left(\frac{-mR_{t-m-1,t}}{n} < \widetilde{R}_{t+1,t+n} < 0 \middle| R_{t-m-1,t} > 0 \;\&\; \mu_{t+1,t+n} < 0 \;\&\; \beta = \frac{n}{m}\right) \\
&\quad = \Pr\left(-\frac{R_{t-m-1,t}}{\beta} < \widetilde{R}_{t+1,t+n} < 0 \middle| R_{t-m-1,t} > 0 \;\&\; \mu_{t+1,t+n} < 0\right) \qquad (6.6)
\end{aligned}
$$

ケース6

負のヒストリカル・アヴェレッジ・リターン $\left(R_{t-m,t} < 0\right)$ を観察して，時点 t は底値だと予想して $\left(\mu_{t+1,t+n} > 0\right)$ 購入し，時点 $t+n$ で P_t より高値



グラフ4：ケース5～ケース8の確率

で，かつ P_{t-m-1} より安値で売却するとき，正の収益 $\left(P_t < \widetilde{P}_{t+n} < P_{t-m-1}\right)$ となる時点 t での確率[9]は(6.7)式である。

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left(P_t < \widetilde{P}_{t+n} < P_{t-m-1} \middle| \Omega_t\right) \\
&\quad = \Pr\left(0 < \widetilde{R}_{t+1,t+n} < -\frac{mR_{t-m-1,t}}{n} \middle| R_{t-m-1,t} < 0 \;\&\; \mu_{t+1,t+n} > 0 \;\&\; \beta = \frac{n}{m}\right) \\
&\quad = \Pr\left(0 < \widetilde{R}_{t+1,t+n} < -\frac{R_{t-m-1,t}}{\beta} \middle| R_{t-m-1,t} < 0 \;\&\; \mu_{t+1,t+n} > 0\right) \\
&\quad = \Pr\left(P_{t-m-1} < \widetilde{P}_{t+n} < P_t \middle| \Omega_t\right)
\end{aligned} \tag{6.7}
$$

ケース7

正のヒストリカル・アヴェレッジ・リターン $\left(R_{t-m,t} > 0\right)$ を観察して，時点 t は天井だと予想して $\left(\mu_{t+1,t+n} < 0\right)$ 空売りをし，時点 $t+n$ で P_{t-m-1} より安値で買戻すとき，正の収益 $\left(\widetilde{P}_{t+n} < P_{t-m-1} < P_t\right)$ となる時点 t での確率[10]は(6.8)式である。

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left(\tilde{P}_{t+n} < P_{t-m-1} < P_t \middle| \Omega_t\right) \\
&\quad = \Pr\left(\tilde{R}_{t+1,t+n} < -\frac{mR_{t-m-1,t}}{n} < 0 \middle| R_{t-m-1,t} > 0 \;\&\; \mu_{t+1,t+n} < 0 \;\&\; \beta = \frac{n}{m}\right) \\
&\quad = \Pr\left(\tilde{R}_{t+1,t+n} < -\frac{R_{t-m-1,t}}{\beta} \middle| R_{t-m-1,t} > 0 \;\&\; \mu_{t+1,t+n} < 0\right)
\end{aligned} \tag{6.8}
$$

ケース8

負のヒストリカル・アヴェレッジ・リターン $\left(R_{t-m,t} > 0\right)$ を観察して，時点 t は底値だと予想して $\left(\mu_{t+1,t+n} > 0\right)$ 購入をし，時点 $t+n$ で P_t より高値で売却するとき，正の収益 $\left(P_t < P_{t-m-1} < \tilde{P}_{t+n}\right)$ となる時点 t での確率[11]は(6.9)式である。

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left(P_t < P_{t-m-1} < \tilde{P}_{t+n} \middle| \Omega_t\right) \\
&\quad = \Pr\left(0 < -\frac{mR_{t-m-1,t}}{n} < \tilde{R}_{t+1,t+n} \middle| R_{t-m-1,t} < 0 \;\&\; \mu_{t+1,t+n} > 0 \;\&\; \beta = \frac{n}{m}\right) \\
&\quad = \Pr\left(-\frac{R_{t-m-1,t}}{\beta} < \tilde{R}_{t+1,t+n} \middle| R_{t-m-1,t} < 0 \;\&\; \mu_{t+1,t+n} > 0\right) \\
&\quad = \Pr\left(\tilde{P}_{t+n} < P_{t-m-1} < P_t \middle| \Omega_t\right)
\end{aligned} \tag{6.9}
$$

グラフ4は横軸に時点 t での $\tilde{R}_{t+1,t+n}$ のボラティリティ $\sigma_{t+1,t+n}$ をとり，各ケースの投資戦略によって，正の収益を得る(6.6)式から(6.9)式の確率を表している。

6.2　両平均収益率が期待収益率のケースの確率

時点 t（現時点）と時点 $t+m$ と時点 $t+n$ $(m<n)$ の3時点が存在して，投資家は時点 t で必ず意思決定を行って，危険資産への売買を決定し，時点 $t+m$ で意思決定を再考することができるが，期間を通して売買は各1回とする。仮に投資家が時点 t で資産の売買を行わないという意思決定を行っ

て，時点 $t+m$ で初めて資産の売買の意思決定を行う場合の確率は前節に集約されるため，本節では論じない。また，時点 t と時点 $t+m$ での予想が一致し，時点 $t+m$ あるいは時点 $t+n$ で正の収益を得る確率のみに限定して考察する。実際には，一方の予想のみが的中した場合でも，3時点の資産価格の大小関係によって，正の収益を得る可能性が存在するが，これらのケースは本稿では論じず，機会を得て考察するつもりである。

6.2.1 時点 t での確率

まず，投資家が時点 t で意思決定を行い，危険資産への売買を決定するとき，正の収益が得られる時点 t での確率を以下のケースによって求める。

6.2.1.A 時点 $t+m$ で取引終了のケース

投資家が時点 t で意思決定を行い，危険資産への売買を決定し，合理的判断によって，時点 $t+m$ で取引を終了する場合の時点 t での確率を以下のケースによって求める。ここで，時点 $t+m$ の時点 t での価格上昇または下落の予想が的中したときには，時点 t での意思決定をそのまま保持して，時点 $t+n$ で取引を終えるケースと，時点 $t+m$ で価格上昇または下落の予想が的中したことを知った結果，時点 $t+n$ までの時間経過にともなうリスクを回避するために，時点 $t+m$ で取引を終えるケースが存在するであろう。そこで，$\widetilde{R}_{t+1,t+n}$ は(6.1)式の正規分布に従うものとし，時点 t から時点 $t+m$ の収益率 $\widetilde{R}_{t+1,t+m}$ は平均 $\mu_{t+1,t+n}$，分散 $\sigma^2_{t+1,t+m}$ の正規分布（ガウス分布）に従うものとする。また，$\widetilde{R}_{t+1,t+n}$ と $\widetilde{R}_{t+1,t+m}$ が正規分布に従うことから，時点 $t+m+1$ から時点 $t+n$ の収益率 $\widetilde{R}_{t+m+1,t+n}$ の時点 t での分布は(7.1)式の正規分布に従う。

$$\begin{aligned}
&\widetilde{R}_{t+m+1,t+n}\Big|\Omega_t \sim N\left(\mu_{t+m+1,t+n}, \sigma^2_{t+m+1,t+n}\Big|\Omega_t\right) \\
&\quad \sim N\left(\frac{\beta\mu_{t+1,t+n}-\mu_{t+1,t+m}}{\beta-1}, \frac{\beta^2\sigma^2_{t+1,t+n}-2\beta\gamma\sigma_{t+1,t+m}\sigma_{t+1,t+n}+\sigma^2_{t+1,t+m}}{(\beta-1)^2}\middle|\Omega_t\right)
\end{aligned} \tag{7.1}$$

ここで，$n/m=\beta$ であり，λ は時点 t での $\widetilde{R}_{t+1,t+n}$ と $\widetilde{R}_{t+1,t+m}$ の相関係数を表す。(7.1)式から，$\mu_{t+1,t+n}$ と $\sigma_{t+1,t+n}$ は(7.2)式が成立する。

$$\mu_{t+1,t+n} = \left(1-\frac{1}{\beta}\right)\mu_{t+m+1,t+n} + \beta\mu_{t+1,t+m} \tag{7.2a}$$

$$\sigma_{t+1,t+n} = \frac{1}{\beta}\left\{\gamma\sigma_{t+1,t+m} \pm \sqrt{\left(\gamma^2-1\right)\sigma^2_{t+1,t+m}+(\beta-1)^2\sigma^2_{t+m+1,t+n}}\right\} \tag{7.2b}$$

ここで，$\mu_{t+m+1,t+n}$ と $\mu_{t+1,t+m}$ と $\sigma_{t+1,t+m}$ と $\sigma_{t+m+1,t+n}$ を主観的に与えることによって，時点 $t+n$ の期待収益率とボラティリティを求めるためである。

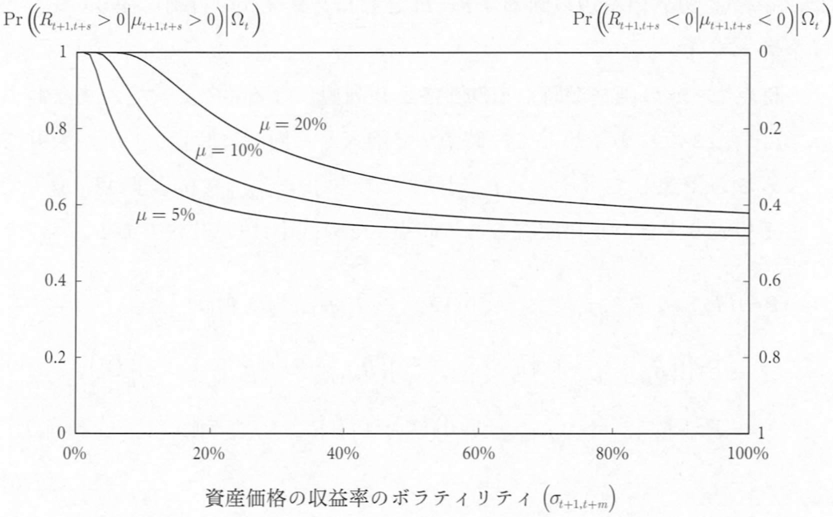
$$\sigma^2_{t+m+1,t+n} \leq \frac{\sigma^2_{t+1,t+m}}{(\beta-1)^2} \tag{7.3}$$

(7.2b)式の実数解の存在と相関係数の定義域とボラティリティの非負条件から，(7.3)式を仮定する。

ケース9

時点 $t+m$ の価格が時点 t の価格より高値になる（$P_t < \widetilde{P}_{t+m}$，すなわち $\mu_{t+1,t+m} > 0$）と予想して，時点 t で購入し，同時に時点 $t+n$ の価格が時点 t の価格より高値になる（$P_t < \widetilde{P}_{t+n}$，すなわち $\mu_{t+1,t+n} > 0$）と予想して，時点 $t+m$ で売却するとき，正の収益となる時点 t での確率は(7.4)式である。

$$\begin{aligned}
&\Pr\left(\left(\left(P_t < \widetilde{P}_{t+n}\middle|\mu_{t+1,t+n}>0\right)\middle|\left(P_t < \widetilde{P}_{t+m}\middle|\mu_{t+1,t+m}>0\right)\right)\middle|\Omega_t\right) \\
&\quad = \Pr\left(\left(\left(\widetilde{R}_{t+1,t+n}>0\middle|\mu_{t+1,t+n}>0\right)\middle|\left(\widetilde{R}_{t+1,t+m}>0\middle|\mu_{t+1,t+m}>0\right)\right)\middle|\Omega_t\right) \\
&\quad = \Pr\left(\left(\widetilde{R}_{t+1,t+m}>0\middle|\mu_{t+1,t+m}>0\right)\middle|\Omega_t\right)
\end{aligned} \tag{7.4}$$



グラフ５： $\Pr\left(\left(R_{t+1,t+s} < 0 \middle| \mu_{t+1,t+s} < 0\right) \middle| \Omega_t\right)$ と $\Pr\left(\left(R_{t+1,t+s} > 0 \middle| \mu_{t+1,t+s} > 0\right) \middle| \Omega_t\right)$

グラフ５は時点 $t+1$ から時点 $t+m$ の資産価格の収益率のボラティリティ $\sigma_{t+1,t+s}$ を横軸にとった確率を表し，(7.4)式の右辺第１項の確率は $s=m$ としたグラフ５の左軸に従う。

ケース10

時点 $t+n$ の価格が最も高値で，時点 t の価格が次に高く，時点 $t+m$ の価格が最も安値である（$\widetilde{P}_{t+m} < P_t < \widetilde{P}_{t+n}$，すなわち $\mu_{t+1,t+m} < 0$ かつ $\mu_{t+1,t+n} > 0$）と予想して，時点 t で空売りし，時点 $t+m$ で買戻すとき，正の収益となる時点 t での確率は(7.5)式である[12]。

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left(\left(\widetilde{P}_{t+m} < P_t < \widetilde{P}_{t+n} \middle| \mu_{t+1,t+m} < 0 \mathbin{\&} \mu_{t+1,t+n} > 0\right) \middle| \Omega_t\right) \\
&\quad = \Pr\left(\left(\left(P_t < \widetilde{P}_{t+n} \middle| \mu_{t+m+1,t+n} < 0\right) \middle| \left(\widetilde{P}_{t+m} < P_t \middle| \mu_{t+1,t+m} < 0\right)\right) \middle| \Omega_t\right) \\
&\quad = \Pr\left(\left(\widetilde{P}_{t+m} < P_t \middle| \mu_{t+1,t+m} < 0\right) \middle| \Omega_t\right) \times \Pr\left(\left(P_t < \widetilde{P}_{t+nt} \middle| \mu_{t+1,t+n} > 0\right) \middle| \Omega_t\right) \\
&\quad = \Pr\left(\left(\widetilde{R}_{t+1,t+m} < 0 \middle| \mu_{t+1,t+m} < 0\right) \middle| \Omega_t\right) \qquad (7.5)
\end{aligned}
$$

ここで，(7.5)式の右辺の確率は $s=m$ としたグラフ5の右軸に従う。

ケース11

時点 $t+m$ の価格が時点 t の価格より高値になる（$P_t < \widetilde{P}_{t+m}$，すなわち $\mu_{t+1,t+m} > 0$）と予想して，時点 t で購入し，同時に時点 $t+m$ が天井であると予想して（$\widetilde{P}_{t+n} < \widetilde{P}_{t+m}$，すなわち $\mu_{t+m+1,t+n} < 0$），時点 $t+m$ で売却するとき，正の収益となる時点 t での確率は(7.7)式である。

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left(\left(\left(\widetilde{P}_{t+n} < \widetilde{P}_{t+m} \middle| \mu_{t+m+1,t+n} < 0\right) \middle| \left(\widetilde{P}_{t+m} > P_t \middle| \mu_{t+1,t+m} > 0\right)\right) \middle| \Omega_t\right) \\
&\quad = \Pr\left(\left(\left(\widetilde{R}_{t+m+1,t+n} < 0 \middle| \mu_{t+m+1,t+n} < 0\right)\left(\widetilde{R}_{t+1,t+m} > 0 \middle| \mu_{t+1,t+m} > 0\right)\right) \middle| \Omega_t\right) \\
&\quad = \Pr\left(\left(\widetilde{R}_{t+1,t+m} > 0 \middle| \mu_{t+1,t+m} > 0\right) \middle| \Omega_t\right) \times \Pr\left(\left(\widetilde{R}_{t+m+1,t+n} < 0 \middle| \mu_{t+m+1,t+n} < 0\right) \middle| \Omega_t\right)
\end{aligned} \tag{7.6}
$$

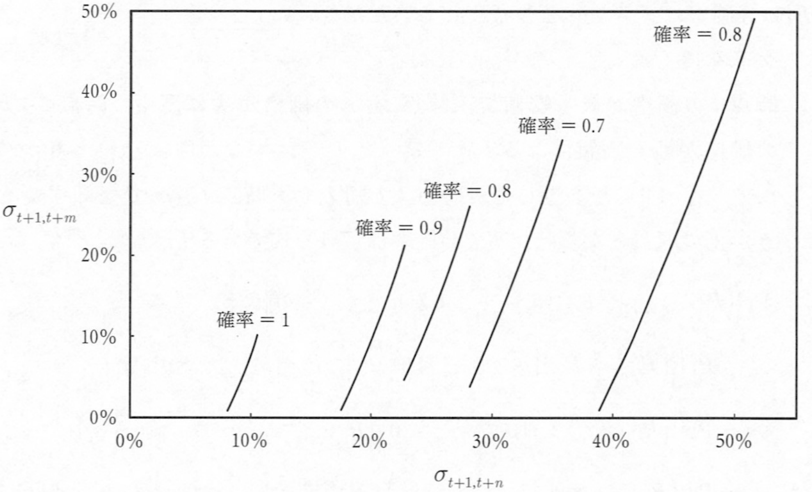
ここで，(7.6)式の右辺第2項は(7.7)式である。

$$
\Pr\left(\left(\widetilde{R}_{t+m+1,t+n} < 0 \middle| \mu_{t+m+1,t+n} < 0\right) \middle| \Omega_t\right) = 1 - \Pr\left(\left(\widetilde{R}_{t+m+1,t+n} > 0 \middle| \mu_{t+m+1,t+n} > 0\right) \middle| \Omega_t\right) \tag{7.7}
$$

(7.6)式の右辺第1項の確率は $s=m$ としたグラフ5の左軸に従う。同様に，グラフ6は時点 t での資産価格の収益率のボラティリティを $s=m$ とした横軸にとった確率を表し，(7.6)式の第2項の確率は β と γ と $\mu_{t+1,t+m}$ と $\mu_{t+1,t+n}$ と $\sigma_{t+1,t+m}$ と $\sigma_{t+1,t+n}$ に依存して変わるため，$\beta=2$，$\gamma=0.7$ とし，さらに $\left(\mu_{t+1,t+m}, \mu_{t+1,t+n}\right) \middle| \Omega_t = (\pm 5\%, \pm 10\%)$ として，(7.1)式から $\mu_{t+1,t+m} | \Omega_t = \pm 15\%$ として，$\sigma_{t+1,t+n}$ と $\sigma_{t+1,t+m}$ を軸にして等しい確率を結んだ曲線（以下では，等確率曲線とよぶ）をグラフ6で表した。なお，一般的に長い期間の収益率のボラティリティが短い期間のものよりも大きいという理由から，グラフ6では $\sigma_{t+1,t+m} < \sigma_{t+1,t+n}$ を仮定する。

ケース12

時点 $t+m$ の価格が時点 t の価格より安値になる（$\widetilde{P}_{t+m} < P_t$，すなわち



グラフ６：$\Pr\left(\left(\left|R_{t+m+1,t+n}\right|>0\middle|\left|\mu_{t+m+1,t+n}\right|>0\right)\middle|\Omega_t\right)$の等確率曲線

$\mu_{t+1,t+m}<0$）と予想して，時点 t で空売りし，同時に時点 $t+m$ が底値であると予想して（$\widetilde{P}_{t+m}<\widetilde{P}_{t+n}$，すなわち $\mu_{t+m+1,t+n}<0$），時点 $t+m$ で売却するとき，正の収益となる時点 t での確率は(7.8)式である。

$$\begin{aligned}
&\Pr\left(\left(\widetilde{P}_{t+m}<\widetilde{P}_{t+n}\middle|\mu_{t+m+1,t+n}>0\right)\middle|\left(\widetilde{P}_{t+m}<P_t\middle|\mu_{t+1,t+m}<0\right)\middle|\Omega_t\right)\\
&=\Pr\left(\left(\widetilde{R}_{t+m+1,t+n}>0\middle|\mu_{t+m+1,t+n}>0\right)\middle|\left(\widetilde{R}_{t+1,t+m}<0\middle|\mu_{t+1,t+m}<0\right)\middle|\Omega_t\right)\\
&=\Pr\left(\left(\widetilde{R}_{t+1,t+m}<0\middle|\mu_{t+1,t+m}<0\right)\middle|\Omega_t\right)\times\Pr\left(\left(\widetilde{R}_{t+m+1,t+n}>0\middle|\mu_{t+m+1,t+m}>0\right)\middle|\Omega_t\right)
\end{aligned} \tag{7.8}$$

ここで，(7.8)式の右辺第１項は(7.9)式である。

$$\Pr\left(\left(\widetilde{R}_{t+1,t+m}<0\middle|\mu_{t+1,t+m}<0\right)\middle|\Omega_t\right)=1-\Pr\left(\left(\widetilde{R}_{t+1,t+m}>0\middle|\mu_{t+1,t+m}>0\right)\middle|\Omega_t\right) \tag{7.9}$$

(7.8)式の右辺第１項の確率は $s=m$ としたグラフ５の右軸に従い，右辺第

2項の等確率はグラフ6を参考にしていただきたい。

ケース13

時点tの価格が最も安値で，時点$t+n$の価格が次に高く，時点$t+m$の価格が最も高値になる（$P_t < \tilde{P}_{t+n} < \tilde{P}_{t+m}$，すなわち$\mu_{t+1,t+m} > 0$かつ$\mu_{t+m+1,t+n} < 0$）と予想して，時点$t$で購入し，時点$t+m$で売却するとき，正の収益となる時点$t$での確率は(7.10)式である[13)]。

$$\begin{aligned}
&\Pr\left(\left(P_t < \tilde{P}_{t+n} < \tilde{P}_{t+m} \middle| \mu_{t+1,t+m} > 0 \,\&\, \mu_{t+m+1,t+n} > 0\right) \middle| \Omega_t\right) \\
&= \Pr\left(\left(\left(\tilde{P}_{t+n} < \tilde{P}_{t+m} \middle| \mu_{t+m+1,t+n} < 0\right) \middle| \left(P_t < \tilde{P}_{t+m} \middle| \mu_{t+1,t+m} > 0\right)\right) \middle| \Omega_t\right) \\
&= \Pr\left(\left(\left(\tilde{R}_{t+m+1,t+n} > 0 \middle| \mu_{t+m+1,t+n} < 0\right) \middle| \left(\tilde{R}_{t+1,t+m} > 0 \middle| \mu_{t+1,t+m} > 0\right)\right) \middle| \Omega_t\right) \\
&= \Pr\left(\left(\tilde{R}_{t+1,t+m} > 0 \middle| \mu_{t+1,t+m} > 0\right) \middle| \Omega_t\right) \times \Pr\left(\left(\tilde{R}_{t+m+1,t+n} < 0 \middle| \mu_{t+m+1,t+n} < 0\right) \middle| \Omega_t\right)
\end{aligned} \tag{7.10}$$

ここで，(7.10)式の右辺第1項の確率は$s=m$としたグラフ5の左軸に従い，右辺第2項の等確率はグラフ6を参考にしていただきたい。

ケース14

時点tの価格が最も高値で，時点$t+n$の価格が次に高く，時点$t+m$の価格が最も安値である（$\tilde{P}_{t+m} < \tilde{P}_{t+n} < P_t$，すなわち$\mu_{t+1,t+m} < 0$かつ$\mu_{t+m+1,t+n} > 0$）と予想して，時点$t$で空売りし，時点$t+m$で買戻すとき，正の収益となる時点$t$での確率は(7.11)式である[14)]。

$$\begin{aligned}
&\Pr\left(\left(\tilde{P}_{t+m} < \tilde{P}_{t+n} < P_t \middle| \mu_{t+1,t+m} < 0 \,\&\, \mu_{t+m+1,t+n} > 0\right) \middle| \Omega_t\right) \\
&= \Pr\left(\left(\left(\tilde{P}_{t+m} < \tilde{P}_{t+n} \middle| \mu_{t+m+1,t+n} > 0\right) \middle| \left(\tilde{P}_{t+m} < P_t \middle| \mu_{t+1,t+m} < 0\right)\right) \middle| \Omega_t\right) \\
&= \Pr\left(\left(\left(\tilde{R}_{t+m+1,t+n} > 0 \middle| \mu_{t+m+1,t+n} > 0\right) \middle| \left(\tilde{R}_{t+1,t+m} < 0 \middle| \mu_{t+1,t+m} < 0\right)\right) \middle| \Omega_t\right) \\
&= \Pr\left(\left(\tilde{R}_{t+1,t+m} < 0 \middle| \mu_{t+1,t+m} < 0\right) \middle| \Omega_t\right) \times \Pr\left(\left(\tilde{R}_{t+m+1,t+n} > 0 \middle| \mu_{t+m+1,t+n} > 0\right) \middle| \Omega_t\right)
\end{aligned} \tag{7.11}$$

ここで，(7.11)式の右辺第1項の確率は$s=m$としたグラフ5の右軸に従

い，右辺第２項の等確率はグラフ６を参考にしていただきたい。

ケース15

時点 $t+m$ の価格が最も高値で，時点 t の価格が次に高く，時点 $t+n$ の価格が最も安値になる（$\tilde{P}_{t+n} < P_t < \tilde{P}_{t+m}$，すなわち $\mu_{t+1,t+m} > 0$ かつ $\mu_{t+m+1,t+n} < 0$）と予想して，時点 t で購入し，時点 $t+m$ で売却するとき，正の収益となる時点 t での確率は(7.12)式である[15]。

$$\begin{aligned}
&\Pr\left(\left(\tilde{P}_{t+n} < P_t < \tilde{P}_{t+m}\middle|\mu_{t+1,t+m} > 0 \,\&\, \mu_{t+1,t+n} < 0\right)\middle|\Omega_t\right)\\
&= \Pr\left(\left(\left(P_t < \tilde{P}_{t+m}\middle|\mu_{t+1,t+m} > 0\right)\middle|\left(\tilde{P}_{t+n} < P_t\middle|\mu_{t+1,t+n} < 0\right)\right)\middle|\Omega_t\right)\\
&= \Pr\left(\left(P_t < \tilde{P}_{t+m}\middle|\mu_{t+1,t+m} > 0\right)\middle|\Omega_t\right)\times\Pr\left(\left(\tilde{P}_{t+n} < P_t\middle|\mu_{t+1,t+n} < 0\right)\middle|\Omega_t\right)\\
&= \Pr\left(\left(\tilde{R}_{t+1,t+m} > 0\middle|\mu_{t+1,t+m} > 0\right)\middle|\Omega_t\right)\times\Pr\left(\left(\tilde{R}_{t+1,t+n} < 0\middle|\mu_{t+1,t+n} < 0\right)\middle|\Omega_t\right)
\end{aligned} \tag{7.12}$$

ここで，(7.12)式の右辺第２項は(7.13)式である。

$$\Pr\left(\left(\tilde{R}_{t+1,t+n} < 0\middle|\mu_{t+1,t+n} < 0\right)\middle|\Omega_t\right) = 1 - \Pr\left(\left(\tilde{R}_{t+1,t+n} > 0\middle|\mu_{t+1,t+n} > 0\right)\middle|\Omega_t\right) \tag{7.13}$$

ここで，(7.12)式の右辺第１項の確率は $s=m$ としたグラフ５の左軸に従い，右辺第２項の等確率はグラフ５の右軸に従う。

6.2.1.B　時点 $t+n$ で取引終了のケース

投資家が時点 t で意思決定を行い，危険資産への売買を決定し，時点 $t+n$ で取引を終了する場合の時点 t での確率を以下のケースによって求める。

ケース16

時点 $t+m$ の価格が時点 t の価格より高値になる（$P_t < \tilde{P}_{t+m}$，すなわち $\mu_{t+1,t+m} > 0$）と予想して，時点 t で購入し，同時に時点 $t+n$ の価格が時点 t の価格より高値になる（$P_t < \tilde{P}_{t+n}$，すなわち $\mu_{t+1,t+n} > 0$）と予想し

て，時点 $t+n$ で売却するとき，正の収益となる時点 t での確率は(7.14)式である。

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left(\left(\left(P_t < \widetilde{P}_{t+n}\middle|\mu_{t+1,t+n} > 0\right)\middle|\left(P_t < \widetilde{P}_{t+m}\middle|\mu_{t+1,t+m} > 0\right)\right)\middle|\Omega_t\right) \\
&\quad = \Pr\left(\left(\left(\widetilde{R}_{t+1,t+n} > 0\middle|\mu_{t+1,t+n} > 0\right)\middle|\left(\widetilde{R}_{t+1,t+m} > 0\middle|\mu_{t+1,t+m} > 0\right)\right)\middle|\Omega_t\right) \\
&\quad = \Pr\left(\left(\widetilde{R}_{t+1,t+m} > 0\middle|\mu_{t+1,t+m} > 0\right)\middle|\Omega_t\right) \times \Pr\left(\left(\widetilde{R}_{t+1,t+n} > 0\middle|\mu_{t+1,t+n} > 0\right)\middle|\Omega_t\right)
\end{aligned}
\tag{7.14}
$$

ここで，(7.14)式の右辺第1項の確率は $s=m$ としたグラフ5の左軸に従い，右辺第2項の確率も $s=n$ としたグラフ5の左軸に従う。

ケース17

時点 $t+m$ の価格が時点 t の価格より安値になる（$\widetilde{P}_{t+m} < P_t$，すなわち $\mu_{t+1,t+m} < 0$）と予想して，時点 t で空売りし，同時に時点 $t+n$ の価格が時点 t の価格より安値になる（$\widetilde{P}_{t+n} < P_t$，すなわち $\mu_{t+1,t+n} < 0$）と予想して，$t+n$ で買戻すとき，正の収益となる時点 t での確率は(7.15)式である。

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left(\left(\left(\widetilde{P}_{t+n} < P_t\middle|\mu_{t+1,t+n} < 0\right)\middle|\left(\widetilde{P}_{t+m} < P_t\middle|\mu_{t+1,t+m} < 0\right)\right)\middle|\Omega_t\right) \\
&\quad = \Pr\left(\left(\left(\widetilde{R}_{t+1,t+n} < 0\middle|\mu_{t+1,t+n} < 0\right)\middle|\left(\widetilde{R}_{t+1,t+m} < 0\middle|\mu_{t+1,t+m} < 0\right)\right)\middle|\Omega_t\right) \\
&\quad = \Pr\left(\left(\widetilde{R}_{t+1,t+m} < 0\middle|\mu_{t+1,t+m} < 0\right)\middle|\Omega_t\right) \times \Pr\left(\left(\widetilde{R}_{t+1,t+n} < 0\middle|\mu_{t+1,t+n} < 0\right)\middle|\Omega_t\right)
\end{aligned}
\tag{7.15}
$$

ここで，(7.15)式の右辺第1項の確率は $s=m$ としたグラフ5の右軸に従い，右辺第2項の確率も $s=n$ としたグラフ5の右軸に従う。

ケース18

時点 $t+n$ の価格が最も高値で，時点 t の価格が次に高く，時点 $t+m$ の価格が最も安値である（$\widetilde{P}_{t+m} < P_t < \widetilde{P}_{t+n}$，すなわち $\mu_{t+1,t+m} < 0$ かつ

$\mu_{t+1,t+n}>0$）と予想して，時点 t で購入し，時点 $t+n$ で売却するとき，正の収益となる時点 t での確率は(7.16)式である[16]。

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left(\left(\widetilde{P}_{t+m}<P_t<\widetilde{P}_{t+n}\middle|\mu_{t+1,t+m}<0\,\&\,\mu_{t+1,t+n}>0\right)\middle|\Omega_t\right)\\
&=\Pr\left(\left(\left(P_t<\widetilde{P}_{t+n}\middle|\mu_{t+m+1,t+n}<0\right)\middle|\left(\widetilde{P}_{t+m}<P_t\middle|\mu_{t+1,t+m}<0\right)\right)\middle|\Omega_t\right)\\
&=\Pr\left(\left(\widetilde{P}_{t+m}<P_t\middle|\mu_{t+1,t+m}<0\right)\middle|\Omega_t\right)\times\Pr\left(\left(P_t<\widetilde{P}_{t+nt}\middle|\mu_{t+1,t+n}>0\right)\middle|\Omega_t\right)\\
&=\Pr\left(\left(\widetilde{R}_{t+1,t+m}<0\middle|\mu_{t+1,t+m}<0\right)\middle|\Omega_t\right)\times\Pr\left(\left(\widetilde{R}_{t+1,t+n}>0\middle|\mu_{t+1,t+n}>0\right)\middle|\Omega_t\right)
\end{aligned}
\tag{7.16}
$$

ここで，(7.16)式の右辺第1項の確率は $s=m$ としたグラフ5の右軸に従い，右辺第2項の確率も $s=n$ としたグラフ5の左軸に従う。

6.2.2　時点 $t+m$ での確率

つぎに，投資家が時点 t で意思決定を行い，危険資産への売買を決定し，時間経過により，時点 t で行った意思決定を時点 $t+m$ で再考した結果，時点 $t+n$ で正の収益が得られる時点 $t+m$ での確率を以下のケースによって求める。そこで，$\widetilde{R}_{t+1,t+n}$ と $\widetilde{R}_{t+1,t+m}$ が正規分布に従うことから，時点 $t+m+1$ から時点 $t+n$ の収益率 $\widetilde{R}_{t+m+1,t+n}$ の時点 $t+m$ での分布は(7.17)式の正規分布に従う。

$$
\widetilde{R}_{t+m+1,t+n}\middle|\Omega_{t+m}\sim N\left(\frac{\beta\mu_{t+1,t+n}-R_{t+1,t+m}}{\beta-1},\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)^2\sigma^2_{t+1,t+n}\middle|\Omega_{t+m}\right)
\tag{7.17}
$$

ここで，時点 $t+m$ の情報集合を条件とした $\widetilde{R}_{t+1,t+m}$ は実現値 $R_{t+1,t+m}$ である。

ケース19

時点 $t+m$ で高値になると予想して（$P_t<\widetilde{P}_{t+m}$，すなわち $\mu_{t+1,t+m}>0$），時点 t で購入し，時点 $t+m$ で値上がりしたことを観察して（$P_t<P_{t+m}$，

すなわち$R_{t+1,t+m}>0$), 時点$t+n$の価格が時点tの価格より高値になる($P_t<\tilde{P}_{t+n}$, すなわち$\mu_{t+1,t+n}>0$)と予想して, 時点$t+n$で売却するとき, 正の収益となる時点$t+m$での確率は(7.18)式である。

$$\begin{aligned}&\Pr\left(\left(P_t<\tilde{P}_{t+n}\middle|P_t<P_{t+m}\right)\middle|\left(\left(P_t<\tilde{P}_{t+m}\middle|\mu_{t+1,t+m}>0\right)\middle|\Omega_t\right)\right)\\&=\Pr\left(\left(\tilde{R}_{t+1,t+n}>0\middle|R_{t+1,t+n}>0\right)\middle|\left(\left(\tilde{R}_{t+1,t+m}>0\middle|\mu_{t+1,t+m}>0\right)\middle|\Omega_t\right)\right)\\&=\Pr\left(\left(\tilde{R}_{t+1,t+m}>0\middle|\mu_{t+1,t+m}>0\right)\middle|\Omega_t\right)\times\Pr\left(\tilde{R}_{t+1,t+n}>0\middle|R_{t+1,t+n}>0\right)\end{aligned}\tag{7.18}$$

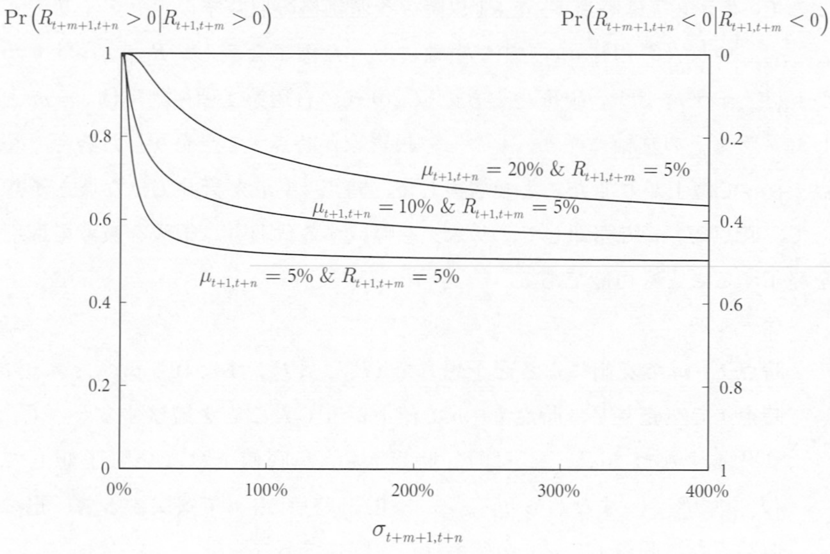
ここで, (7.18)式の右辺第1項の確率は$s=m$としたグラフ5の左軸に従い, 右辺第2項の確率は$s=n$かつ$\mu_{t+1,t+m}$を$R_{t+1,t+n}$としたグラフ5の左軸に従う。

ケース20

時点$t+m$で安値になると予想して($\tilde{P}_{t+m}<P_t$, すなわち$\mu_{t+1,t+m}<0$), 時点tで空売りし, 時点$t+m$で値下がりしたことを観察して($P_{t+m}<P_t$, すなわち$R_{t+1,t+m}<0$), 時点$t+n$の価格が時点tの価格より安値になる($\tilde{P}_{t+n}<P_t$, すなわち$\mu_{t+1,t+n}<0$)と予想して, 時点$t+n$で買戻すとき, 正の収益となる時点$t+m$での確率は(7.19)式である。

$$\begin{aligned}&\Pr\left(\left(P_t<\tilde{P}_{t+n}\middle|P_{t+m}<P_t\right)\middle|\left(\left(\tilde{P}_{t+m}<P_t\middle|\mu_{t+1,t+m}<0\right)\middle|\Omega_t\right)\right)\\&=\Pr\left(\left(\tilde{R}_{t+1,t+n}<0\middle|R_{t+1,t+m}<0\right)\middle|\left(\left(\tilde{R}_{t+1,t+m}<0\middle|\mu_{t+1,t+m}<0\right)\middle|\Omega_t\right)\right)\\&=\Pr\left(\left(\tilde{R}_{t+1,t+m}<0\middle|\mu_{t+1,t+m}<0\right)\middle|\Omega_t\right)\times\Pr\left(\tilde{R}_{t+1,t+n}<0\middle|R_{t+1,t+m}<0\right)\end{aligned}\tag{7.19}$$

ここで, (7.19)式の右辺第1項の確率は$s=m$としたグラフ5の右軸に従い, 右辺第2項の確率は$s=n$かつ$\mu_{t+1,t+m}$を$R_{t+1,t+n}$としたグラフ5の右軸に従う。しかし, 投資家が時点tで空売りした場合, 時点$t+m$で値下がりしたことを観察して, 時点$t+m$で買戻して, 確定した正の収益を得て取引



グラフ７：$\beta=2$　$\Pr\left(R_{t+m+1,t+n}>0\middle|R_{t+1,t+m}>0\right)$ と $\Pr\left(R_{t+m+1,t+n}<0\middle|R_{t+1,t+m}<0\right)$

を終了することも可能である[17)]。

ケース21

時点$t+m$で値上がりすると予想して（$P_t<\widetilde{P}_{t+m}$，すなわち$\mu_{t+1,t+m}>0$），時点tで購入し，時点$t+m$で値上がりしたことを観察するが（$P_t<P_{t+m}$，すなわち$R_{t+1,t+m}>0$），時点$t+m$が天井ではないと予想して（$P_{t+m}<\widetilde{P}_{t+n}$，すなわち$\mu_{t+m+1,t+n}>0$），時点$t+n$で売却するとき，正の収益となる時点$t+m$での確率は(7.20)式である。

$$\begin{aligned}
&\Pr\left(\left(P_{t+m}<\widetilde{P}_{t+n}\middle|P_t<P_{t+m}\right)\middle|\left(\left(P_t<\widetilde{P}_{t+m}\middle|\mu_{t+1,t+m}>0\right)\middle|\Omega_t\right)\right)\\
&=\Pr\left(\left(\widetilde{R}_{t+m+1,t+n}>0\middle|R_{t+1,t+m}>0\right)\middle|\left(\left(\widetilde{R}_{t+1,t+m}>0\middle|\mu_{t+1,t+m}>0\right)\middle|\Omega_t\right)\right)\\
&=\Pr\left(\left(\widetilde{R}_{t+1,t+m}>0\middle|\mu_{t+1,t+m}>0\right)\middle|\Omega_t\right)\times\Pr\left(\widetilde{R}_{t+m+1,t+n}>0\middle|R_{t+1,t+m}>0\right)
\end{aligned}\tag{7.20}$$

ここで，グラフ7は時点 $t+m+1$ 以降の資産価格の収益率のボラティリティ $\sigma^2_{t+m+1,t+n}\left[=\left(\beta/(\beta-1)\right)^2\sigma^2_{t+1,t+n}\right]$ を横軸にとった確率を表し，$R_{t+1,t+m}=5\%$ かつ $\mu_{t+1,t+n}=5\%$, 10%, 20% のときの(7.20)式の右辺第1項の確率は $s=m$ としたグラフ7の左軸に従う。しかし，投資家が時点 t で空売りした場合，時点 $t+m$ で値上がりしたことを観察して，時点 $t+m$ が天井ではないと予想して，時点 $t+m$ で売却して，リスクを軽減する代わりに損失を被って取引を終了することも可能である。

ケース22

時点 $t+m$ で安値になると予想して（$\widetilde{P}_{t+m}<P_t$，すなわち $\mu_{t+1,t+m}<0$），時点 t で空売りし，時点 $t+m$ で値下がりしたことを観察するが（$P_{t+m}<P_t$，すなわち $R_{t+1,t+m}<0$），時点 $t+m$ が底値ではないと予想して（$\widetilde{P}_{t+n}<P_{t+m}$，すなわち $\mu_{t+m+1,t+n}<0$），時点 $t+n$ で買戻すとき，正の収益となる時点 $t+m$ での確率は(7.21)式である。

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left(\left(\widetilde{P}_{t+n}<P_{t+m}\middle|P_{t+m}<P_t\right)\middle|\left(\left(\widetilde{P}_{t+m}<P_t\middle|\mu_{t+1,t+m}<0\right)\middle|\Omega_t\right)\right)\\
&=\Pr\left(\left(\widetilde{R}_{t+m+1,t+n}<0\middle|R_{t+1,t+m}<0\right)\middle|\left(\left(\widetilde{R}_{t+1,t+m}<0\middle|\mu_{t+1,t+m}<0\right)\middle|\Omega_t\right)\right)\\
&=\Pr\left(\left(\widetilde{R}_{t+1,t+m}<0\middle|\mu_{t+1,t+m}<0\right)\middle|\Omega_t\right)\times\Pr\left(\widetilde{R}_{t+m+1,t+n}<0\middle|R_{t+1,t+m}<0\right)
\end{aligned}
\tag{7.21}
$$

ここで，グラフ6は時点 $t+m+1$ 以降の資産価格の収益率のボラティリティ $\sigma^2_{t+m+1,t+n}$ を横軸にとった確率を表し，(7.20)式の右辺第1項の確率は $s=m$ としたグラフ7の右軸に従う。(7.21)式の右辺第2項は(7.22)式である。しかし，投資家が時点 t で空売りした場合，時点 $t+m$ で値下がりしたことを観察して，時点 $t+m$ で買戻して，確定した正の収益を得て取引を終了することも可能である。また，時点 t で購入した場合，時点 $t+m$ で値下がりしたことを観察して，時点 $t+m$ が底値ではないと予想して，時点 $t+m$ で売却して，リスクを軽減する代わりに損失を被って取引を終了する

ことも可能である。

$$\Pr\left(\widetilde{R}_{t+m+1,t+n} < 0 \middle| R_{t+1,t+m} < 0\right) = 1 - \Pr\left(\widetilde{R}_{t+m+1,t+n} > 0 \middle| R_{t+1,t+m} > 0\right) \quad (7.22)$$

7. おわりに

本稿では，拙稿〔1〕で論じた連続時間型平均収益率と離散時間型相乗平均収益率の定義との関係を示し，ヒストリカル・アヴェレッジ・リターンと期待収益率とを明確に区別した上で，2種類の期間が異なる収益率がどちらに属するかによって，3つのケースに分けて，両平均収益率の大きさ（絶対値）が一致する資産価格の条件を求めた。その結果，両平均収益率がともにヒストリカル・リターンである場合とともに期待収益率である場合には，時点が異なるだけで同様の一致条件が得られ，拙稿〔1〕と同じ条件を確認した。また，投資家が離散時間型平均収益率を連続時間型平均収益率と勘違いした場合の資産価格比と期間比の関係を図示した。さらに，m 期間収益率の変化によって，グラフ上の一致条件の線は時計回りに回転することを示した。しかし，一方がヒストリカル・アヴェレッジ・リターンで他方が期待収益率の場合には，価格比が n 期間収益率となるため，期間比はゼロより大きい範囲となり，さらに，m 期間収益率の変化によって，グラフ上の一致条件の線は時計回りとは逆に回転する。

最後に，投資家のための投資戦略として，一方がヒストリカル・アヴェレッジ・リターンで他方が期待収益率の場合と両平均収益率が期待収益率の場合，期待収益率が正規分布に従うとき，投資家が時点 t で1危険資産の売買を考えて，時点 $t+m$ で資産価格の実現値を確認した上で，時点 t で実行した売買を再検討して，反対売買を行って取引を終了するか，あるいは時点 $t+n$ まで意思決定を変更しないかのどちらかに限って論じた。実際には，

時点 $t+m$ で時点 t での意思決定の誤りを確認して，再度投資決定を行うことができるはずであるが，本稿では，時点 $t+m$ で取引を終了するか，あるいは継続するかに限ることにした。そのとき，投資家は時点 t での時点 $t+m$ と時点 $t+n$ での資産価格の大小関係の予想を行い，また，時点 $t+m$ では時点 $t+m$ での資産価格の上下のみの予想を行うものとする。また，この節では，投資家の各時点での価格の上下のみの予想が的中した場合だけの投資成功確率のシミュレーションを行った。特に，時点 t での意思決定を時点 $t+n$ まで持ち越す場合には，時点 t あるいは時点 $t+m$ での価格の予想の一方だけが的中した場合でも，3 時点の資産価格の大小関係によって，正の収益を得る可能性が存在するが，これらのケースは本稿では論じず，機会を得て考察するつもりである。

その結果，投資家がヒストリカル・アヴェレッジ・リターンを観察して，1 度だけ投資決定を行う場合には，概して上限と下限を有する 1 つの条件付確率で表現でき，そのシミュレーションはグラフ 3 とグラフ 4 で示した。一方，投資家が将来の 2 時点で意思決定を行う場合には，概して上限あるいは下限を有する 2 つの条件付確率の積で表現できることを示した。しかし，投資家が時点 t での価格 $<$ 時点 $t+n$ での価格 $<$ 時点 $t+m$ での価格，あるいは時点 $t+m$ での価格 $<$ 時点 $t+n$ での価格 $<$ 時点 t での価格と予想する場合には，2 つの条件付確率の一方のシミュレーションが煩雑なものとなる。本稿ではこれまで指摘してきたように，かなり限られたケースのみの投資成功確率を求めた。そのため，予想が外れて，予想外の正の収益を得るチャンスが存在することから，実際の投資成功確率は本稿で求めた値以上のものであることを付け加えておく。

〔注〕

1) 以下では，連続時間型平均収益率に関しては拙稿〔1〕の記号に従う。

2) $\rho_{t-n,t}$ は拙稿〔1〕の (2.3) 式の連続時間型 n 期間平均収益率に対応する。

3) ここで，$\tilde{\rho}_{t+1,t+n} = \ln \widetilde{P}_{t+n} - \ln P_t$ である。

4)　ここで，(3.4)式の最後の等号は拙稿〔1〕の(3.4)式に一致する。

5)　(6.2)式と(6.3)式は「ヒストリカル・リターンに関係なく，時点tで買って，時点$t+n$で売却するとき，損失となる時点tでの確率」と「ヒストリカル・リターンに関係なく，時点tで空売りをして，時点$t+n$で買戻すとき，損失を被る時点tでの確率」と同値である。

6)　「正のヒストリカル・リターンを観察して，時点tは天井だと予想して$(\mu_{t+1,t+n} < 0)$空売りし，時点$t+n$でP_tより高値で買戻して，損失となる時点tでの確率」と同値である。

7)　「負のヒストリカル・リターンを観察して，時点tは底値だと予想して$(\mu_{t+1,t+n} > 0)$購入し，時点$t+n$でP_tより安値で売却するとき，損失を被る時点tでの確率」と同値である。

8)　「正のヒストリカル・リターンを観察して，時点tは天井ではないと予想して$(\mu_{t+1,t+n} > 0)$購入し，時点$t+n$でP_{t-m-1}より高値で，かつP_tより安値で売却するとき，損失となる時点tでの確率」と同値である。

9)　「負のヒストリカル・リターンを観察して，時点tは底値ではないと予想して$(\mu_{t+1,t+n} < 0)$空売りして，時点$t+n$でP_tより高値，かつP_{t-m-1}より安値で買戻すとき，損失となる時点tでの確率」と同値である。

10)　「正のヒストリカル・リターンを観察して，時点tは天井ではないと予想して$(\mu_{t+1,t+n} > 0)$購入し，時点$t+n$でP_{t-m-1}より安値で売却するとき，損失となる時点tでの確率」と同値である。

11)　「負のヒストリカル・リターンを観察して，時点tは底値ではないと予想して$(\mu_{t+1,t+n} < 0)$空売りし，時点$t+n$でP_{t-m-1}より高値で買戻すとき，損失となる時点tでの確率」と同値である。

12)　時点$t+m$の価格が時点tの価格より安値になる（$\tilde{P}_{t+m} < P_t$，すなわち$\mu_{t+1,t+m} < 0$）と予想して，時点tで購入し，同時に時点$t+n$の価格が時点tの価格より高値・になると予想する（$P_t < \tilde{P}_{t+n}$，すなわち$\mu_{t+1,t+n} > 0$）ことと同じである。

13)　時点$t+m$の価格が時点tの価格より高値になる（$P_t < \tilde{P}_{t+m}$，すなわち$\mu_{t+1,t+m} > 0$）と予想して，時点tで購入し，同時に時点$t+m$が天井ではないと予想して（$\tilde{P}_{t+m} < \tilde{P}_{t+n}$，すなわち$\mu_{t+m+1,t+n} > 0$）ことと同じである。

14)　時点$t+m$の価格が時点tの価格より安値になる（$\tilde{P}_{t+m} < P_t$，すなわち$\mu_{t+1,t+m} < 0$）と空売りして，時点tで購入し，同時に時点$t+m$が底値ではないと予想する（$\tilde{P}_{t+n} < \tilde{P}_{t+m}$，すなわち$\mu_{t+1,t+m} < 0$）ことと同じである。

15)　時点$t+m$の価格が時点tの価格より高値になる（$P_t < \tilde{P}_{t+m}$，すなわち$\mu_{t+1,t+m} > 0$）と予想して，時点tで購入し，同時に時点$t+n$の価格が時点tの価格より安値になると予想する（$\tilde{P}_{t+n} < P_t$，すなわち$\mu_{t+1,t+n} < 0$）ことと同じである。

16)　時点 $t+m$ の価格が時点 t の価格より安値になる（$\widetilde{P}_{t+m} < P_t$，すなわち $\mu_{t+1,t+m} < 0$）と予想して，時点 t で購入し，同時に時点 $t+n$ の価格が時点 t の価格より高値になると予想する（$P_t < \widetilde{P}_{t+n}$，すなわち $\mu_{t+1,t+n} > 0$）こととと同じである。

17)　そのときの確率は $\Pr\left(\left(\widetilde{R}_{t+1,t+m} < 0 \middle| \mu_{t+1,t+m} < 0\right) \middle| \Omega_t\right)$ である。

〔参考文献〕

〔1〕 中川裕司,「ヒストリカル・データを使った連続時間型平均収益率の罠（Trap of Continuous-Time Average Returns, Using Historical Data)」『岐阜経済大学論集』第 40 巻 3 号（2007 年 3 月)。

〔2〕 Richard A. Brealey and Myers, S. C. *Principles of Corporate Finance,* McGraw-Hill/Irwin; 8 edition, New York.