岐阜経済大学論集 40 巻 3 号（2007 年）

ヒストリカル・データを使った連続時間型平均収益率の罠

中　川　裕　司

1. はじめに

研究成果で公表されるデータは資産価格を集計・加工した平均収益率・収益率の分散等の基本統計量であり，価格または収益率一つ一つの値が公表されることは稀である。そのとき，集計・加工された基本統計量の平均収益率から，その元データの価格情報を間接的に予測できるだけである。同一期間で種類の異なる資産価格の収益率の基本統計量を比較するときには問題は生じないように思われる。たとえば，今期の資産価格の収益率を今期の資産価

格に対する前期の資産価格の比の対数で定義した収益率（以下では，連続時間型収益率とよぶ）で表すとき，n 期間の資産価格の収益率（以下では，連続時間型 n 期間収益率，あるいは単に n 期間収益率とよぶ）は今期の資産価格に対する n 期前の資産価格の比の対数となり，その平均（以下では，連続時間型 n 期間平均収益率，あるいは単に n 期間平均収益率とよぶ）を比較するとき，期間が同じ n 期間であれば，資産の種類が多くても，それぞれの n 期間平均収益率で比較しようが，n 期間収益率で比較しようが，その元のデータである今期の各資産価格と n 期前の各資産価格を比較するだけで，期間を考慮する必要はない。たとえば，今期の各資産価格をすべて同じ 1,000 と想定するとき，各資産の n 期間平均収益率が公表されているので，n 期前の各資産価格が計算できるという点で，多数の資産価格の平均収益率の比較は容易である。

しかし，たとえ，一種類の資産の平均収益率を比較する場合でも，期間が異なる場合には，注意を要する。期間が同一の多数の資産の平均収益率の比較のように，期間を考慮せずに，単純に資産価格を比較すると問題が生じる。そこでは，$m < n$（整数）のとき，m 期間平均収益率と n 期間平均収益率を同じ期間に変換して，比較する必要がある。このとき，m 期間平均収益を n 期間に拡張できる，あるいは n 期間平均収益率を m 期間に短縮できることを前提にして，両平均収益率を比較しなければならない。特に，連続時間型平均収益率の比較の場合，平均収益率の比較は m 期前の資産価格と n 期前の資産価格と両期間のみに依存する。よって，平均収益率の比較は，偶然出現した過去の 2 時点の資産価格の比較と両期間に集約される。

本稿では，m 期間平均収益率と n 期間平均収益率を比較して，n 期間平均収益率の大きさ（絶対値）が m 期間平均収益率の大きさ（絶対値）と一致する資産価格の条件を求め，また，前者が後者を上回る可能性を m 期間収益率の確率分布を仮定して，考察する。そこでは，$m < n$ の条件の下では，n 期前の資産価格は今期あるいは m 期前の資産価格とかけ離れた値にならない

なければならない場合が存在する。こうした n 期前の資産価格は起こり得ないかを論じる。概して，期間が異なる2種類の連続時間型平均収益率の比較時に，平均収益率のみしか観測できないときに生ずる問題点と，そのときに承知しておかなければならない資産価格にたいする注意点を明きからにする。

まず，次節では，連続時間型平均収益率の定義と特質を考察する。さらに3節では，期間が異なる2種類の平均収益率の大きさ，すなわち絶対値の一致条件を明からにするとともに，n 期間平均収益率が m 期間平均収益率を上回る条件を求める。つづく4節では，m 期前の資産価格に対する n 期前の資産価格の比率の確率分布が一様分布に従う場合と対数正規分布に従う場合に，n 期間平均収益率が m 期間平均収益率を上回る確率を求める。

2. 連続時間型平均収益率の定義と特質

時点 $t-s$ の資産価格 P_{t-s} と時点 $t-s-1$ の資産価格 P_{t-s-1} の関係を(2.1)式のように考え，(2.1)式が成立する収益率 r_{t-s} を時点 $t-s$ の連続時間型1期間平均収益率あるいは連続時間型1期間収益率と定義する。

$$P_{t-1} = P_{t-s-1} \exp\left(r_{t-s}\right) \qquad (s = 0, 1, \cdots, n) \tag{2.1}$$

ここで，$0 < P_{t-s}$ とする。時点 $s = 0$ のときの収益率 r_t に(2.1)式を再帰的代入を行うと，(2.2)式となる。

$$P_t = P_{t-1} \exp\left(r_t\right) = P_{t-n-1} \exp\left(\sum_{s=0}^{n-1} r_{t-s}\right) \tag{2.2}$$

(2.2)式の各辺を P_{t-n-1} で割って，両辺の対数をとって，両辺を n で割った値を連続時間型 n 期間平均収益率 R_n として，(2.3)式を定義する。

$$R_n \equiv \frac{\rho_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} r_{t-s} = \frac{\ln P_t - \ln P_{t-n-1}}{n} \tag{2.3}$$

ここで，R_n は時点 $t-n$ から時点 t までの連続時間型 n 期間平均収益率，ρ_n は時点 $t-n$ から時点 t までの連続時間型 n 期間収益率を表す。

つぎに，資産価格が常に有限値であることを前提にして，(2.3)式の n に対する極限を考える。

$$R_\infty \equiv \operatorname*{plim}_{n\to\infty} R_n \Big|_{0<P_{t-\infty}<\infty} = \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{\ln P_t - \ln P_{t-n-1}}{n}\Big|_{0<P_{t-\infty}<\infty} = 0 \tag{2.4}$$

ここで，直感的には，(2.4)式の $P_{t-\infty}$ は遠い過去の資産価格であり，有限であるため，∞ 期間平均収益率 R_∞ はゼロに収束する。すなわち，n の極限では，平均収益率はゼロに収束することを意味している。(2.2)式の最初の等号と(2.4)式から，(2.5)式が成立する。

$$|r_t| \geq R_\infty \tag{2.5}$$

ここで，(2.5)式の等号は，$P_t = P_{t-1}$ のとき，r_t と R_∞ はともにゼロである。

3. m 期間平均収益率の大きさと n 期間平均収益率の大きさの一致条件

つぎに，$1 \leq m < n$ の仮定の下で，$|R_m|$ と $|R_n|$ の大小関係を考えるため，関数 $\delta_{m,n}$ を(3.1)式のように定義すると，(2.3)式から，(3.1)式となる。ここで，平均収益率の絶対値で比較することは，時点 $t-m-1$ あるいは時点 $t-n-1$ の資産価格が時点 t での資産価格を中心に，プラス方向とマイナス方向に等しい確率で出現していたであろうという想定に基づいている。

$$\delta_{m,n} \equiv |R_m| - |R_n| = \frac{|\rho_m|}{m} - \frac{|\rho_n|}{n} = \frac{|\ln P_t - \ln P_{t-m-1}|}{m} - \frac{|\ln P_t - \ln P_{t-n-1}|}{n} \quad (3.1)$$

次項では，$\delta_{m,n}=0$ となる条件を考える。すなわち，n と m と P_t と P_{t-m-1} の値を与えることによって，連続時間型 m 期間平均収益率が連続時間型 n 期間平均収益率に一致するような一意の P_{t-n-1} が決定する。換言すれば，基本統計量から両平均収益率 R_m と R_n と期間 m と n が既知であるとき，P_{t-n-1} は P_t と P_{t-m-1} の関数であると考える。

3.1. $\rho_n<\rho_m<0$ または $\rho_n>\rho_m>0$ のケース

まず，m 期間平均収益率 ρ_m と n 期間平均収益率 ρ_n の関係が $\rho_n<\rho_m<0$ または $\rho_n>\rho_m>0$ のケースの $\delta_{m,n}=0$ となる条件を考える。そのとき(3.1)式から，(3.2)式となる。

$$P_{t-n-1} = \frac{P_{t-m-1}^{n/m}}{P_t^{n/m-1}} \quad (3.2)$$

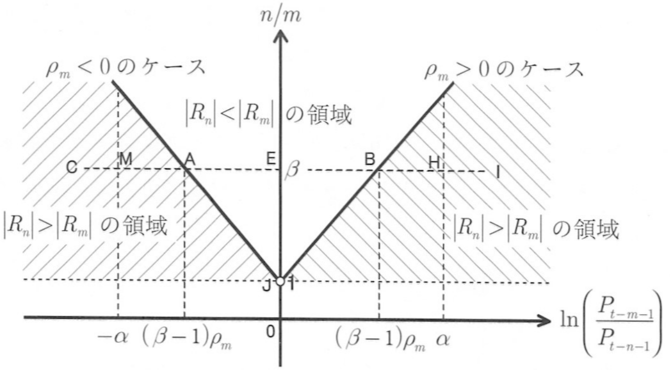
(3.2)式から，時点 $t-m-1$ の資産価格と時点 $t-n-1$ の資産価格の比 P_{t-m-1}/P_{t-n-1}，あるいは P_t/P_{t-n-1} に対する P_t/P_{t-m-1} の比の P_{t-n-1} に(3.2)式を代入すると，(3.3)式となる。

$$\frac{P_{t-m-1}}{P_{t-n-1}} = \frac{P_t/P_{t-n-1}}{P_t/P_{t-m-1}} = \left(\frac{P_t}{P_{t-m-1}}\right)^{n/m-1} = \exp\left\{\rho_m\left(\frac{n}{m}-1\right)\right\} \quad (3.3)$$

(3.3)式から，n/m について解くと(3.4)式となり，$\delta_{m,n}=0$ を満足する条件下で，期間比 n/m と価格比 P_{t-m-1}/P_{t-n-1} の関係式が成立する。

$$\frac{n}{m} = 1 + \frac{\ln(P_{t-m-1}/P_{t-n-1})}{\rho_m} \quad (3.4)$$

ここで，$m<n$ の仮定により，(3.4)式は1より大きくなければならないが，(3.4)式の右辺が1になる条件は $P_{t-n-1}=P_{t-m-1}$ のときであり，この条件は $\rho_n>\rho_m>0$ または $\rho_n<\rho_m<0$ の仮定より除外されている。すなわち，$\rho_n<$



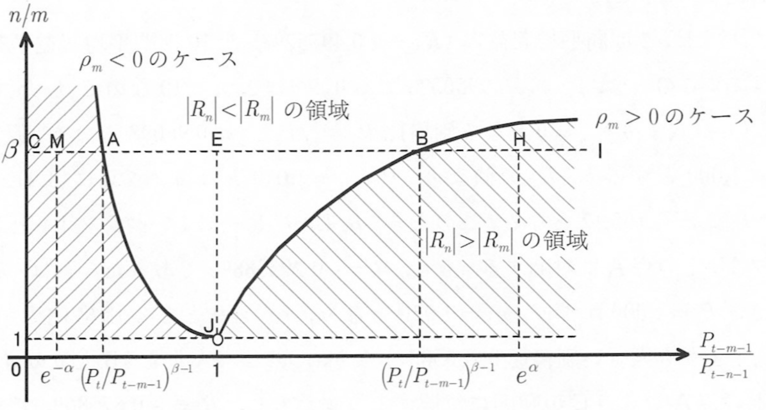
グラフ 1A：$|R_n|=|R_m|$ を満足する曲線 $1+\ln(P_{t-m-1}/P_{t-n-1})/\rho_m$

$\rho_m<0$ のとき，(3.4)式の右辺第 2 項の分子分母はともに負であるので，(3.4)式は 1 より大きい。また，$\rho_n>\rho_m>0$ のときには，(3.4)式の右辺第 2 項の分子分母はともに正であるので，(3.4)式は 1 より大きい。また，$\rho_m<\rho_n<0$ または $\rho_m>\rho_n>0$ のときには，$|R_n|>|R_m|$ の可能性はゼロであるため考慮の必要はない。

m 期間収益率 ρ_m の上昇によって，(3.4)式の傾きがいかに変化するかをみるために，(3.4)式を ρ_m で微分すると，(3.5)式となる。

$$\frac{d}{d\rho_m}\left(\frac{n}{m}\right)=-\frac{\ln\left(P_{t-m-1}/P_{t-n-1}\right)}{\rho_m^2} \tag{3.5}$$

(3.5)式の右辺の分母は正であり，$\rho_n>\rho_m>0$ のケースは(3.5)式の右辺の分子が正であり，(3.5)式は負となる。$\rho_n<\rho_m<0$ または $\rho_n>\rho_m>0$ の条件の下で，(3.4)式をグラフに描くとグラフ 1A となる。このとき，$\delta_{m,n}=0$ を満足する条件はグラフ 1A 上では点 J を通って，$\rho_m>0$ のケースの直線よりも緩やかな直線となり，グラフ 1B 上では点 J を通って，$\rho_m>0$ のケースの曲線よりも緩やかな曲線となる。また，$\rho_n<\rho_m<0$ のケースは(3.5)式の右辺の分子が負であり，(3.5)式は正となる。このとき，$\delta_{m,n}=0$ を満足する条件



グラフ 1B：$|R_n| = |R_m|$ を満足する曲線 $1+\ln(P_{t-m-1}/P_{t-n-1})/\rho_m$

はグラフ 1A 上では点 J を通って，$\rho_m < 0$ のケースの直線よりも緩やかな直線となり，グラフ 1B 上では点 J を通って，$\rho_m < 0$ のケースの曲線よりも緩やかな曲線となる。すなわち，$|\rho_m|$ が上昇すると，点 J を通って，直線あるいは曲線はより緩やかになり，n/m と P_{t-m-1} を所与とすると，$\delta_{m,n} = 0$ を満足するためには $\rho_m > 0$ のケースでは P_{t-n-1} はより上昇し，$\rho_m < 0$ のケースでは P_{t-n-1} はより下落する必要があることを意味している。

つぎに，(3.3)式から，期間比 n/m を 1 より大きい任意の定数 β とするときの $\delta_{m,n} = 0$ となる価格比 P_{t-m-1}/P_{t-n-1} を求めると，(3.6)式となる。

$$\frac{P_{t-m-1}}{P_{t-n-1}} = \left(\frac{P_t}{P_{t-m-1}}\right)^{\beta-1} = \exp\{\rho_m(\beta-1)\} \tag{3.6}$$

ここで，グラフ 1A の直線の上方は $|R_n| < |R_m|$ の領域であり，直線の下方は $|R_n| > |R_m|$ の領域を表し，グラフ中の斜線部である。また，グラフ 1A の横軸は価格比の対数であるため，横軸に価格比 P_{t-m-1}/P_{t-n-1} で描いたグラフがグラフ 1B であり，グラフ 1A と同様に，曲線の上方は $|R_n| < |R_m|$ の領域であり，曲線の下方は $|R_n| > |R_m|$ の領域を表し，グラフ中の斜線部である。

例題3.1：$\rho_n < \rho_m < 0$ のケース

たとえば，2期間平均収益率（$R_m = -0.49752\%$）と10期間平均収益率を想定する。このとき，$\rho_m = -0.99503\%$ であり，$m = 2$，$n = 10$ なので $\beta = 5$ であり，(3.4)式より $\delta_{m,n} = 0$ となる価格比 P_{t-m-1}/P_{t-n-1} は0.96098となる。仮に，$P_t = 1{,}000$ とすると，R_m の値より，$P_{t-m-1} = 1{,}010$ となり，さらに(3.4)式より，$P_{t-n-1} = 1{,}105.17$ となる。このとき，R_n は R_m に一致し，グラフ1A上とグラフ1B上の点Aに対応する。もし，$R_n = -0.295588\%$ であったならば，そのとき，$P_t = 1{,}000$ かつ $P_{t-n-1} = 1{,}030$ となり，$\delta_{m,n} = 0$ となる価格比 P_{t-m-1}/P_{t-n-1} よりも大きい価格比0.980583となり，グラフ1A上と1B上での $\beta = 5$ 線上の点Aから点Eの範囲に位置する。またもし，$R_n = -0.67586\%$ であったならば，そのとき，$P_t = 1{,}000$ かつ $P_{t-n-1} = 1{,}070$ となり，$\delta_{m,n} = 0$ となる価格比 P_{t-m-1}/P_{t-n-1} よりも小さい価格比0.943925となり，グラフ1A上と1B上での $\beta = 5$ 線上の点Cから点Aの範囲に位置し，R_n は -2% であり，$|R_n| > |R_m|$ となる。

例題3.2：$\rho_n > \rho_m > 0$ のケース

また，2期間平均収益率（$R_m = 0.50252\%$）と10期間平均収益率を想定する。このとき，$\rho_m = 1.00503\%$ であり，$m = 2$，$n = 10$ なので $\beta = 5$ であり，(3.4)式より $\delta_{m,n} = 0$ となる価格比 P_{t-m-1}/P_{t-n-1} は1.04102となる。仮に，$P_t = 1{,}000$ とすると，R_m の値より，$P_{t-m-1} = 990$ となり，さらに(3.4)式より，$P_{t-n-1} = 950.99$ となる。このとき，R_n は R_m に一致し，グラフ1A上とグラフ1B上の点Bに対応する。もし，$R_n = 1.053605\%$ であったならば，そのとき，$P_t = 1{,}000$ かつ $P_{t-n-1} = 900$ ならば，$\delta_{m,n} = 0$ となる価格比 P_{t-m-1}/P_{t-n-1} よりも大きい価格比1.1となり，グラフ1A上と1B上での $\beta = 5$ 線上の点Bから点Iの範囲に位置する。またもし，$R_n = 0.3045921\%$ であったならば，そのとき，$P_t = 1{,}000$ かつ $P_{t-n-1} = 970$ ならば，$\delta_{m,n} = 0$ となる価格比 P_{t-m-1}/P_{t-n-1} よりも小さい価格比1.020619となり，グラフ1A上と1B上での $\beta = 5$

線上の点Eから点Bの範囲に位置し，R_n は0.5%であり，$|R_n| < |R_m|$ となる。

3.2. $\rho_n < 0 < \rho_m$ または $\rho_n > 0 > \rho_m$ のケース

つぎに，$\rho_n < 0 < \rho_m$ のケースの $\delta_{m,n}$ を考えると，(3.1)式から，(3.7)式となる。

$$\delta_{m,n} = \frac{\ln P_t - \ln P_{t-m-1}}{m} + \frac{\ln P_t - \ln P_{t-n-1}}{n} = \frac{1}{mn}\ln\left(\frac{P_t^{n+m}}{P_{t-m-1}^{n}P_{t-n-1}^{m}}\right) \quad (3.7)$$

(3.7)式から $\delta_{m,n} = 0$ となる条件は(3.8)式である。

$$P_{t-n-1} = \frac{P_t^{1+n/m}}{P_{t-m-1}^{n/m}} \quad (3.8)$$

また，$\rho_n > 0 > \rho_m$ のケースの $\delta_{m,n}$ を考えると，(3.1)式から，(3.9)式となる。

$$\delta_{m,n} = \frac{\ln P_t - \ln P_{t-m-1}}{m} - \frac{\ln P_t - \ln P_{t-n-1}}{n} = \frac{1}{mn}\ln\left(\frac{P_{t-m-1}^{n}P_{t-n-1}^{m}}{P_t^{n+m}}\right) \quad (3.9)$$

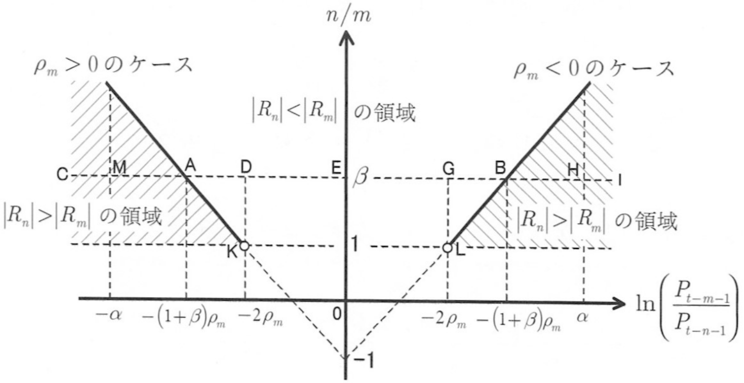
(3.9)式から $\delta_{m,n} = 0$ となる条件は(3.8)式に一致する。

(3.8)式から，まず，$\rho_n < 0 < \rho_m$ または $\rho_n > 0 > \rho_m$ の条件の下で，$\delta_{m,n} = 0$ を満足する時点 $t-m-1$ の資産価格と時点 $t-n-1$ の資産価格の比 P_{t-m-1}/P_{t-n-1}，あるいは P_t/P_{t-n-1} に対する P_t/P_{t-m-1} の比の P_{t-n-1} に(3.8)式を代入すると，(3.10)式となる。

$$\frac{P_t/P_{t-n-1}}{P_t/P_{t-m-1}} = \frac{P_{t-m-1}}{P_{t-n-1}} = \left(\frac{P_t}{P_{t-m-1}}\right)^{-(1+n/m)} = \exp\left\{-\rho_m\left(1+\frac{n}{m}\right)\right\} \quad (3.10)$$

(3.10)式から，n/m について解き，さらに n/m が1より大きいことを条件として，$\delta_{m,n} = 0$ を満足する期間比 n/m と価格比 P_{t-m-1}/P_{t-n-1} の関係式を表すと，(3.11)式になる。

$$\frac{n}{m} = -1 - \frac{\ln\left(P_{t-m-1}/P_{t-n-1}\right)}{\rho_m} \quad (3.11)$$



グラフ 2A：$|R_n| = |R_m|$ を満足する曲線 $\max\{1, -1-\ln(P_{t-m-1}/P_{t-n-1})/\rho_m\}$

$\rho_m < 0$ のとき，すなわち $\rho_n > 0 > \rho_m$ のとき，右辺の第 2 項が 1 よりも大きい条件は(3. 12a)式および(3. 12b)式である。

$$\ln\left(\frac{P_{t-m-1}}{P_{t-n-1}}\right) < -2\rho_m \Big|_{\rho_m > 0} \tag{3. 12a}$$

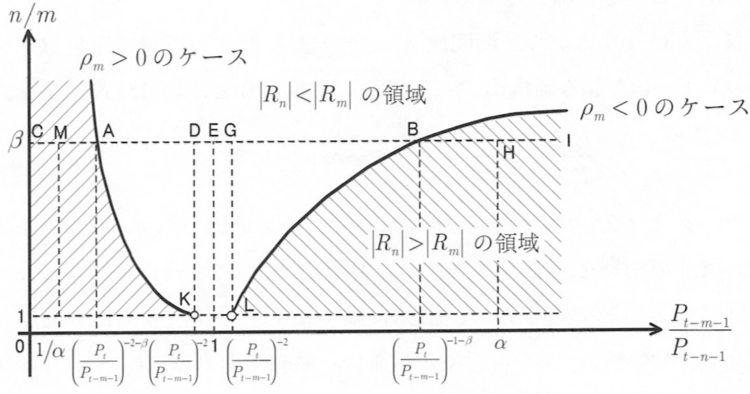
$$\frac{P_{t-m-1}}{P_{t-n-1}} < e^{-2\rho_m}\Big|_{\rho_m > 0} = \left(\frac{P_t}{P_{t-m-1}}\right)^{-2}\Bigg|_{\rho_m > 0} \tag{3. 12b}$$

ここで，(3. 12a)式はグラフ 2A 上の点 L より上の直線上の範囲であり，(3. 12b)式はグラフ 2B 上の点 L より上の曲線上の範囲であることを意味している。また $\rho_n > 0 > \rho_m$ のとき，右辺の第 2 項が 1 よりも大きい条件は(3. 13a)式および(3. 13b)式である。

$$\ln\left(\frac{P_{t-m-1}}{P_{t-n-1}}\right) > -2\rho_m \Big|_{\rho_m < 0} \tag{3. 13a}$$

$$\frac{P_{t-m-1}}{P_{t-n-1}} > e^{-2\rho_m}\Big|_{\rho_m < 0} = \left(\frac{P_t}{P_{t-m-1}}\right)^{-2}\Bigg|_{\rho_m < 0} \tag{3. 13b}$$

ここで，(3. 13a)式はグラフ 2A 上の点 K より上の直線上の範囲であり，(3. 13b)式はグラフ 2B 上の点 K より上の曲線上の範囲であることを意味し



グラフ 2B：$|R_n|=|R_m|$ を満足する曲線 $\max\{1,-1-\ln(P_{t-m-1}/P_{t-n-1})/\rho_m\}$

ている。

m 期間収益率 ρ_m の上昇によって，(3.11)式の傾きがいかに変化するかをみるために，(3.11)式を ρ_m で微分すると，(3.14)式となる。

$$\frac{d}{d\rho_m}\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{\ln\left(P_{t-m-1}/P_{t-n-1}\right)}{\rho_m^2} \tag{3.14}$$

(3.14)式の右辺の分母は正であり，$\rho_n<0<\rho_m$ のケースは(3.14)式の右辺の分子が負であり，(3.14)式は負となる。このとき，$\delta_{m,n}=0$ を満足する条件はグラフ 2A 上では点 L を通って，$\rho_m>0$ のケースの直線よりも急な直線となり，グラフ 2B 上では点 L を通って，$\rho_m>0$ のケースの曲線よりも急な曲線となる。また，$\rho_n>0>\rho_m$ のケースは(3.5)式の右辺の分子が正であり，(3.5)式は正となる。このとき，$\delta_{m,n}=0$ を満足する条件はグラフ 2A 上では点 K を通って，$\rho_m<0$ のケースの直線よりも急な直線となり，グラフ 2B 上では点 K を通って，$\rho_m<0$ のケースの曲線よりも急な曲線となる。結局，$|\rho_m|$ が上昇すると，点 L または点 K を通って，直線あるいは曲線は急になり，n/m と P_{t-m-1} を所与とすると，$\delta_{m,n}=0$ を満足するためには $\rho_m>0$ のケースでは P_{t-n-1} はより下落し，$\rho_m<0$ のケースでは P_{t-n-1} はより上昇する

必要があることを意味している。

つぎに，(3. 10)式から，期間比 n/m を 1 より大きい任意の定数 β とするときの $\delta_{m,n}=0$ となる価格比 P_{t-m-1}/P_{t-n-1} を求めると，(3. 15)式となる。

$$\frac{P_{t-m-1}}{P_{t-n-1}}=\left(\frac{P_t}{P_{t-m-1}}\right)^{-1-\beta}=\exp\left\{-\rho_m(1+\beta)\right\} \tag{3. 15}$$

ここで，グラフ 2A の直線の上方は $|R_n|<|R_m|$ の領域であり，直線の下方は $|R_n|>|R_m|$ の領域を表し，グラフ中の斜線部である。また，グラフ 2A の横軸は価格比の対数であるため，横軸に価格比 P_{t-m-1}/P_{t-n-1} で描いたグラフがグラフ 2B であり，グラフ 2A と同様に，曲線の上方は $|R_n|<|R_m|$ の領域であり，曲線の下方は $|R_n|>|R_m|$ の領域を表し，グラフ中の斜線部である。

例題 3. 3：$\rho_n<0<\rho_m$ のケース

たとえば，2 期間平均収益率（$R_m=0.502517\%$）と 10 期間平均収益率を想定する。このとき，$\rho_m=1.00503\%$ であり，$m=2$，$n=10$ なので $\beta=5$ であり，(3. 15)式より $\delta_{m,n}=0$ となる価格比 P_{t-m-1}/P_{t-n-1} は 0.941480 となる。仮に，$P_t=1{,}000$ とすると，R_m の値より，$P_{t-m-1}=990$ となり，さらに(3. 15)式より，$P_{t-n-1}=1{,}051.54$ となる。このとき，R_n は R_m に一致し，グラフ 2A 上とグラフ 2B 上の点 A に対応する。もし，$R_n=-0.295588\%$ であったならば，そのとき，$P_t=1{,}000$ かつ $P_{t-n-1}=1{,}030$ ならば，$\delta_{m,n}=0$ となる価格比 P_{t-m-1}/P_{t-n-1} よりも大きい価格比 0.961165 となり，グラフ 2A 上と 2B 上での $\beta=5$ 線上の点 A から点 D の範囲に位置する。またもし，$R_n=-0.607586\%$ であったならば，そのとき，$P_t=1{,}000$ とすると，$P_{t-n-1}=1{,}070$ となり，$\delta_{m,n}=0$ となる価格比 P_{t-m-1}/P_{t-n-1} よりも小さい価格比 0.925234 となり，グラフ 2A 上と 2B 上での $\beta=5$ 線上の点 C から点 A の範囲に位置する。

例題3.4：$\rho_n > 0 > \rho_m$ のケース

また，2期間平均収益率（$R_m = -0.49752\%$）と10期間平均収益率を想定する。このとき，$\rho_m = -0.99503\%$ であり，$m = 2$，$n = 10$ なので $\beta = 5$ であり，(3.15)式より $\delta_{m,n} = 0$ となる価格比 P_{t-m-1}/P_{t-n-1} は1.06152となる。仮に，$P_t = 1{,}000$ とすると，R_m の値より，$P_{t-m-1} = 1{,}010$ となり，さらに(3.15)式より，$P_{t-n-1} = 951.47$ となる。このとき，R_n は R_m に一致し，グラフ2A上とグラフ2B上の点Bに対応する。もし，$R_n = 1.0530605\%$ であったならば，そのとき，$P_t = 1{,}000$ かつ $P_{t-n-1} = 900$ ならば，$\delta_{m,n} = 0$ となる価格比 P_{t-m-1}/P_{t-n-1} よりも大きい価格比1.12222となり，グラフ2A上と2B上での $\beta = 5$ 線上の点Bから点Iの範囲に位置する。またもし，$R_n = 0.304592\%$ であったならば，そのとき，$P_t = 1{,}000$ かつ $P_{t-n-1} = 970$ ならば，$\delta_{m,n} = 0$ となる価格比 P_{t-m-1}/P_{t-n-1} よりも小さい価格比1.041237となり，グラフ2A上と2B上での $\beta = 5$ 線上の点Gから点Bの範囲に位置する。

4. $\widetilde{P}_{t-m-1}/\widetilde{P}_{t-n-1}$ の確率分布が一様分布に従うケースの $\left|\widetilde{R}_n\right| > \left|\widetilde{R}_m\right|$ の確率

これまで，資産価格をヒストリカル･データより既知として扱ってきたが，本節以降，資産価格を確率変数として扱う。まず，期間比 n/m を定数 β とし，価格比 $\widetilde{P}_{t-m-1}/\widetilde{P}_{t-n-1}$ の確率分布が平均1で任意に与えた下限 $1/\alpha$，上限 α までの一様分布に従うとするとき，$\left|\widetilde{R}_n\right| > \left|\widetilde{R}_m\right|$ となる確率を求める。

4.1. $1/\alpha \le \widetilde{P}_{t-m-1}/\widetilde{P}_{t-n-1} \le \alpha$ の範囲で $\widetilde{R}_m$ と $\widetilde{R}_n$ の符号が同じであるケース

まず，$\widetilde{R}_m$ と $\widetilde{R}_n$ の符号が同じであるケースの確率を考える。期間比 n/m

が $\beta(>1)$ で，任意の正の定数 α を所与として，価格比の対数が $\ln\left(\widetilde{P}_{t-m-1}/\widetilde{P}_{t-n-1}\right) \le |\alpha|$ の範囲，または $\widetilde{P}_{t-m-1}/\widetilde{P}_{t-n-1} \le e^{|\alpha|}$ の範囲で一様分布に従うと仮定するとき，すなわち，$\tilde{\rho}_m < 0$ のケースではグラフ 1A 上または 1B 上の $\overline{\mathrm{MH}}$ の区間にあるときの $\left|\widetilde{R}_n\right| > \left|\widetilde{R}_m\right|$ となる確率は(4. 1a)式となる。

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left(\left|\widetilde{R}_n\right| > \left|\widetilde{R}_m\right| \middle| sign\left\{\widetilde{R}_n\right\} = sign\left\{\widetilde{R}_n\right\} \& \, n/m = \beta > 1 \,\&\, 1/\alpha \le \widetilde{P}_{t-m-1}/\widetilde{P}_{t-n-1} < 1\right) \\
&\quad = \Pr\left(\left|\widetilde{R}_n\right| > \left|\widetilde{R}_m\right| \middle| sign\left\{\widetilde{R}_m\right\} = sign\left\{\widetilde{R}_n\right\} \& \, n/m = \beta > 1 \,\&\, \tilde{\rho}_m < 0\right) \\
&\quad = \max\left\{0, 1 + \frac{(\beta - 1)\,\tilde{\rho}_m}{\alpha}\right\}\Bigg|_{sign\left\{\widetilde{R}_m\right\} = sign\left\{\widetilde{R}_n\right\} \& n/m = \beta > 1 \& \tilde{\rho}_m < 0}
\end{aligned}
\tag{4. 1a}
$$

また，$\tilde{\rho}_m > 0$ のケースではグラフ 1A 上，またはグラフ 1B 上の $\overline{\mathrm{IE}}$ の区間にあるときの $\left|\widetilde{R}_n\right| > \left|\widetilde{R}_m\right|$ となる確率は(4. 1b)式となる。

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left(\left|\widetilde{R}_n\right| > \left|\widetilde{R}_m\right| \middle| sign\left\{\widetilde{R}_m\right\} = sign\left\{\widetilde{R}_n\right\} \& \, n/m = \beta > 1 \,\&\, 1 < \widetilde{P}_{t-m-1}/\widetilde{P}_{t-n-1} \le \alpha\right) \\
&\quad = \Pr\left(\left|\widetilde{R}_n\right| > \left|\widetilde{R}_m\right| \middle| sign\left\{\widetilde{R}_m\right\} = sign\left\{\widetilde{R}_n\right\} \& \, n/m = \beta > 1 \,\&\, \tilde{\rho}_m > 0\right) \\
&\quad = \max\left\{0, 1 - \frac{(\beta - 1)\,\tilde{\rho}_m}{\alpha}\right\}\Bigg|_{sign\left\{\widetilde{R}_m\right\} = sign\left\{\widetilde{R}_n\right\} \& n/m = \beta > 1 \& \tilde{\rho}_m > 0}
\end{aligned}
\tag{4. 1b}
$$

(4. 1a)式と(4. 1b)式を横軸に α，$m=1$ のとき，縦軸に $\left|\widetilde{R}_n\right| > \left|\widetilde{R}_m\right|$ となる確率を描いたものがグラフ 3. 1A であり，$m=2$ のときのものがグラフ 3. 1B である。

例題 4. 1：$\widetilde{R}_m$ と $\widetilde{R}_n$ の符号が同じであるケース

たとえば，$\left|\widetilde{R}_m\right| = 0.5\%$ である 2 期間平均収益率と符号が同じである 10 期間平均収益率 $\widetilde{R}_n$ を想定する。このとき，$m=2$，$n=10$ なので $\beta=5$ であり，$\widetilde{P}_t$ を 1,000，と想定すると，$\widetilde{P}_{t-m-1}$ は 1,010.05 または 990.05 であり，さらに α の値から，$886.92 \le \widetilde{P}_{t-n} \le 1{,}127.50$ の範囲で，価格比 $\widetilde{P}_{t-m}/\widetilde{P}_{t-n}$ が一様分

布に従うと仮定するとき，(4.1)式より，$\left|\tilde{R}_n\right|>\left|\tilde{R}_m\right|$ となる確率は 60.05594% となる。この確率は，$\tilde{R}_m=1\%$ のとき $886.92 \leq \tilde{P}_{t-n} \leq 1{,}083.29$，または $\tilde{R}_m=-1\%$ のとき $923.12 \leq \tilde{P}_{t-n} \leq 1{,}127.50$ となる確率を表している。

また，$\left|\tilde{R}_m\right|=1.5\%$ である 2 期間平均収益率と符号が同じである 20 期間平均収益率 R_n を想定する。このとき，$m=2$，$n=20$ なので $\beta=10$ であり，$\tilde{P}_t$ を 1,000，と想定すると，$\tilde{P}_{t-m-1}$ は 1,030.45 または 970.45 であり，さらに α の値から，$718.92 \leq \tilde{P}_{t-n} \leq 1{,}390.97$ の範囲で，価格比 $\tilde{P}_{t-m}/\tilde{P}_{t-n}$ が一様分布に従うと仮定するとき，(4.1)式より，$\left|\tilde{R}_n\right|>\left|\tilde{R}_m\right|$ となる確率は 10.25476% となる。この確率は，$718.92 \leq \tilde{P}_{t-n} \leq 1{,}390.97$ の範囲で $718.92 \leq \tilde{P}_{t-n} \leq 740.82$ または $1{,}349.86 \leq \tilde{P}_{t-n} \leq 1{,}390.97$ となる確率を表している。

4.2. $1/\alpha \leq \tilde{P}_{t-m-1}/\tilde{P}_{t-n-1} \leq \alpha$ の範囲で $\tilde{R}_m$ と $\tilde{R}_n$ の符号が異なるケース

つぎに，$\tilde{R}_m$ と $\tilde{R}_n$ の符号が異なるケースの確率を考える。期間比 n/m が $\beta(>1)$ で，任意の正の定数 α を所与として，価格比の対数が $\ln\left(\tilde{P}_{t-m-1}/\tilde{P}_{t-n-1}\right) \leq |\alpha|$ の範囲で一様分布に従うと仮定するとき，すなわち，$\tilde{\rho}_m>0$ のケースではグラフ 2A 上，またはグラフ 2B 上の $\overline{\mathsf{MH}}$ の区間にあるときの $\left|\tilde{R}_n\right|>\left|\tilde{R}_m\right|$ となる確率は(4.2a)式となる。

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left(\left|\tilde{R}_n\right|>\left|\tilde{R}_m\right| \Big| sign\left\{\tilde{R}_m\right\} \neq sign\left\{\tilde{R}_n\right\} \,\&\, n/m=\beta>1 \,\&\, 1/\alpha<\tilde{P}_{t-m-1}/\tilde{P}_{t-n-1}<\exp\left(-2\rho_m\right)\right) \\
&\quad = \Pr\left(\left|\tilde{R}_n\right|>\left|\tilde{R}_m\right| \Big| sign\left\{\tilde{R}_m\right\} \neq sign\left\{\tilde{R}_n\right\} \,\&\, n/m=\beta>1 \,\&\, \tilde{\rho}_m>0\right) \\
&\quad = \max\left\{0, 1-\frac{(1+\beta)\,\tilde{\rho}_m}{\alpha}\right\}\Bigg|_{sign\left\{\tilde{R}_m\right\} \neq sign\left\{\tilde{R}_n\right\} \& n/m=\beta>1 \& \tilde{\rho}_m>0}
\end{aligned}
\tag{4.2a}
$$

また，$\tilde{\rho}_m<0$ のケースではグラフ 2A 上，またはグラフ 2B 上の $\overline{\mathsf{IE}}$ の区間にあるときの $\left|\tilde{R}_n\right|>\left|\tilde{R}_m\right|$ となる確率は(4.2b)式となる。

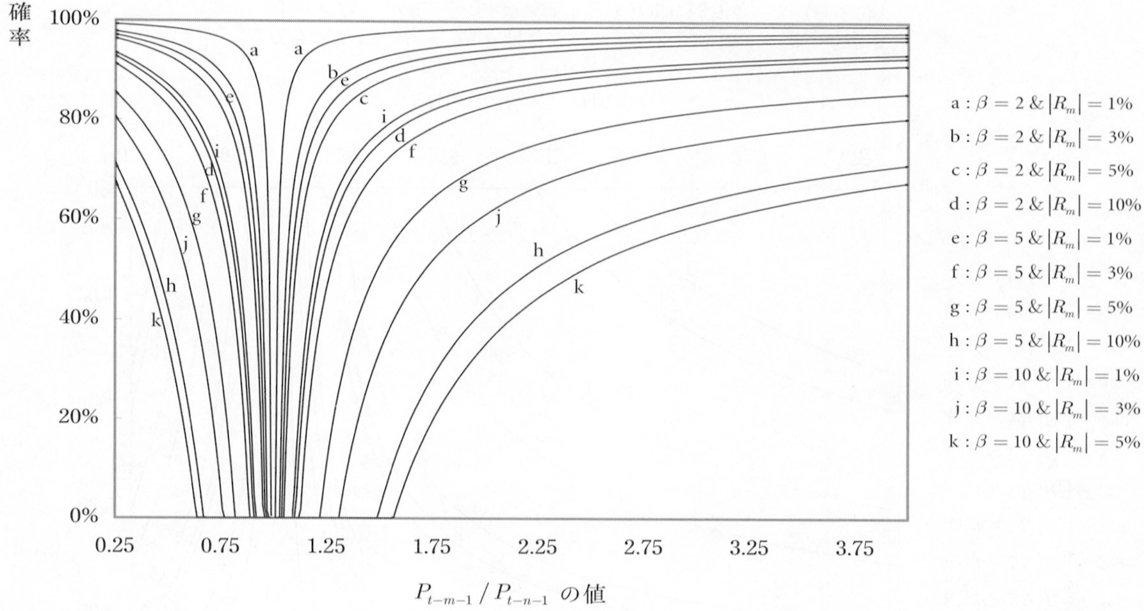
$$
\begin{aligned}
&\Pr\left(\left|\widetilde{R}_n\right|>\left|\widetilde{R}_m\right|\middle| sign\left\{\widetilde{R}_m\right\}\neq sign\left\{\widetilde{R}_n\right\}\ \&\ n/m=\beta>1\ \&\ \exp\left(-2\rho_m\right)<\widetilde{P}_{t-m-1}/\widetilde{P}_{t-n-1}\leq\alpha\right)\\
&\quad=\Pr\left(\left|\widetilde{R}_n\right|>\left|\widetilde{R}_m\right|\middle| sign\left\{\widetilde{R}_m\right\}\neq sign\left\{\widetilde{R}_n\right\}\ \&\ n/m=\beta>1\ \&\ \tilde{\rho}_m<0\right)\\
&\quad=\max\left\{0,1+\frac{(1+\beta)\,\tilde{\rho}_m}{\alpha}\right\}\Bigg|_{sign\left\{\widetilde{R}_m\right\}\neq sign\left\{\widetilde{R}_n\right\}\&n/m=\beta>1\&\tilde{\rho}_m<0}
\end{aligned}
\tag{4.2b}
$$

(4.2a)式と(4.2b)式を横軸にα，$m=1$のとき，縦軸に$\left|\widetilde{R}_n\right|>\left|\widetilde{R}_m\right|$となる確率を描いたものがグラフ3.2Aであり，$m=2$のときのものがグラフ3.1Bである。

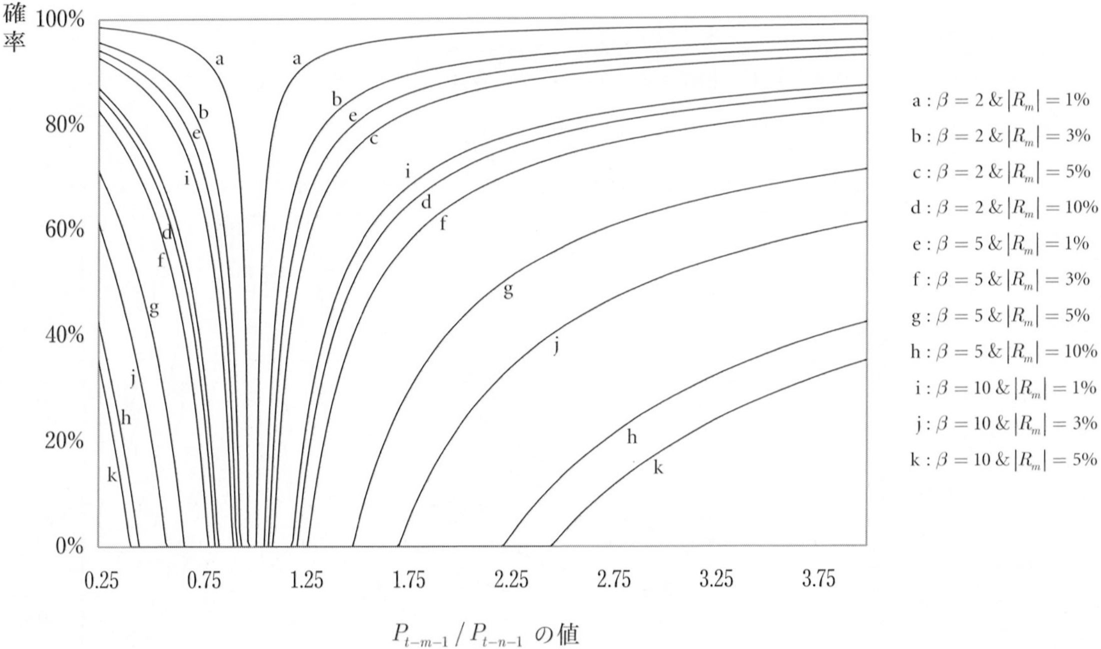
例題4.2：$\widetilde{R}_m$と$\widetilde{R}_n$の符号が異なるケース

$\left|\widetilde{R}_m\right|=0.5\%$である2期間平均収益率と符号が同じである10期間平均収益率$\widetilde{R}_n$を想定する。このとき，$m=2$，$n=10$なので$\beta=5$であり，$\widetilde{P}_t$を1,000，と想定すると，$\widetilde{P}_{t-m-1}$は1,010.05または990.05であり，さらにαを0.1と設定すると，$913.9312\leq\widetilde{P}_{t-n-1}\leq 1{,}094.1743$の範囲で価格比$\widetilde{P}_{t-m-1}/\widetilde{P}_{t-n-1}$が一様分布に従うと仮定するとき，(4.2)式より，$\left|\widetilde{R}_n\right|>\left|\widetilde{R}_m\right|$となる確率は40.06394%となる。この確率は，$913.9312\leq\widetilde{P}_{t-n-1}\leq 1{,}094.1743$の範囲で，$913.9312\leq\widetilde{P}_{t-n-1}<951.2294$または$1{,}051.2711<\widetilde{P}_{t-n-1}\leq 1{,}094.1743$となる確率を表している。

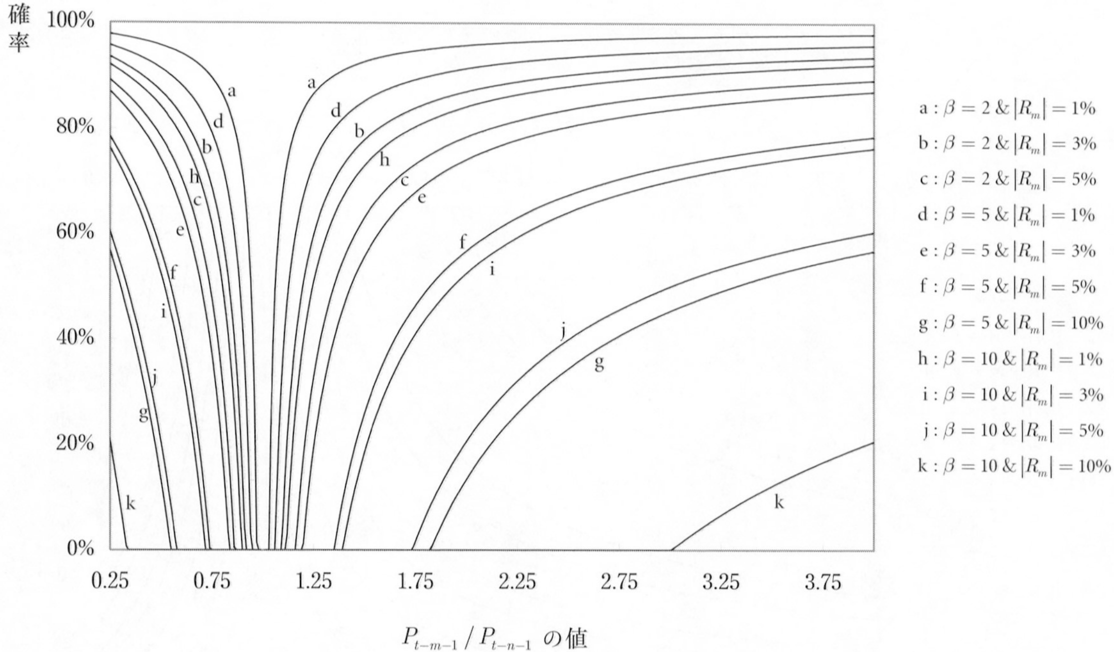
また，$\left|\widetilde{R}_m\right|=1.5\%$である2期間平均収益率と符号が同じである20期間平均収益率R_nを想定し，αを2と設定する。このとき，$m=2$，$n=20$なので$\beta=10$であり，$\widetilde{P}_t$を1,000，と想定すると，$\widetilde{P}_{t-m-1}$は1,030.45または970.45であり，さらにαを0.3と設定すると，$763.3795\leq\widetilde{P}_{t-n-1}\leq 1{,}309.9645$の範囲で価格比$\widetilde{P}_{t-m-1}/\widetilde{P}_{t-n-1}$が一様分布に従うと仮定するとき，(4.1)式より，$\left|\widetilde{R}_n\right|>\left|\widetilde{R}_m\right|$となる確率はゼロとなる。この確率は，$\widetilde{P}_{t-n-1}<740.8182$または$1{,}349.8588<\widetilde{P}_{t-n-1}$の範囲で，$\left|\widetilde{R}_n\right|>\left|\widetilde{R}_m\right|$となるため，$763.3795\leq\widetilde{P}_{t-n-1}\leq 1{,}309.9645$の範囲では$\left|\widetilde{R}_n\right|>\left|\widetilde{R}_m\right|$の確率はゼロである。



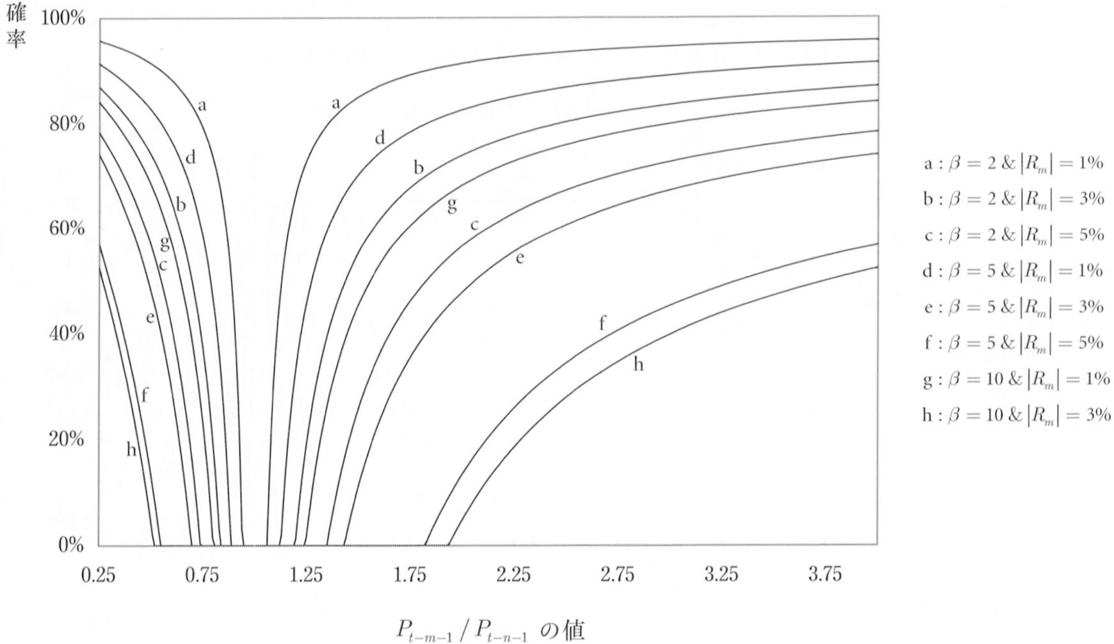
グラフ 3.1A：R_n と R_m の符号が一致するときの $|R_n| > |R_m|$ の確率
$1/\alpha < P_{t-m-1}/P_{t-n-1} < \alpha$ の範囲で一様分布に従うケース（$m = 1$）



グラフ 3.1B：R_n と R_m の符号が一致するときの $|R_n| > |R_m|$ の確率
$1/\alpha < P_{t-m-1}/P_{t-n-1} < \alpha$ の範囲で一様分布に従うケース（$m = 2$）



グラフ 3.2A：R_n と R_m の符号が異なるときの $|R_n| > |R_m|$ の確率
$1/\alpha < P_{t-m-1}/P_{t-n-1} < \alpha$ の範囲で一様分布に従うケース（$m = 1$）



グラフ 3.2B：R_n と R_m の符号が異なるときの $|R_n| > |R_m|$ の確率
$1/\alpha < P_{t-m-1}/P_{t-n-1} < \alpha$ の範囲で一様分布に従うケース（$m = 2$）

5. $\widetilde{P}_t/\widetilde{P}_{t-m-1}$ の確率分布が対数正規分布するケースの $\left|\widetilde{R}_n\right|>\left|\widetilde{R}_m\right|$ の確率

$\widetilde{R}_m$ の確率分布が平均 μ，分散 σ^2 の正規分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ に従うと仮定する。すなわち，(5.1)式を仮定する。

$$\widetilde{R}_m=\frac{1}{m}\ln\left(\frac{\widetilde{P}_t}{\widetilde{P}_{t-m-1}}\right)\sim N\left(\mu,\sigma^2\right) \tag{5.1}$$

ここで，(5.1)式から(5.2)式が成立する。すなわち，$\widetilde{R}_m$ の確率分布が正規分布に従う場合には，$\tilde{\rho}_m$ の確率分布も正規分布に従う。

$$\tilde{\rho}_m\equiv m\widetilde{R}_m=\ln\left(\frac{\widetilde{P}_t}{\widetilde{P}_{t-m-1}}\right)\sim N\left(m\mu,m^2\sigma^2\right) \tag{5.2}$$

以下の議論では，$\widetilde{R}_n$ の確率分布が正規分布に従うという仮定を必要としない[1]。

では，$\tilde{\rho}_n>\tilde{\rho}_m>0$ または $\tilde{\rho}_n<\tilde{\rho}_m<0$ の条件下で，$n/m=\beta$ のとき，(3.3)式と(3.6)式と(5.2)式より，価格比 $\widetilde{P}_{t-m-1}/\widetilde{P}_{t-n-1}$ の対数の確率分布を求めると(5.3)式となる。

$$\ln\left(\frac{\widetilde{P}_{t-m-1}}{\widetilde{P}_{t-n-1}}\right)=\tilde{\rho}_m(\beta-1)\sim N\left((\beta-1)m\mu,\left((\beta-1)m\sigma\right)^2\right) \tag{5.3}$$

すなわち，(5.3)式は $\ln\left(\widetilde{P}_{t-m-1}/\widetilde{P}_{t-n-1}\right)$ の確率分布が平均 $(\beta-1)\mu m$，分散 $((\beta-1)m\sigma)^2$ の正規分布に従うことを意味する。そこで，(5.3)式から，正規分布密度関数は(5.4)式となる[2]。

$$f\left(\ln\left(\frac{\widetilde{P}_{t-m-1}}{\widetilde{P}_{t-n-1}}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(\beta-1)m\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{\ln\left(\widetilde{P}_{t-m-1}/\widetilde{P}_{t-n-1}\right)-(\beta-1)m\mu}{(\beta-1)m\sigma}\right\}^2\right] \tag{5.4}$$

(5.4)式から，$\tilde{\rho}_n > \tilde{\rho}_m > 0$ または $\tilde{\rho}_n < \tilde{\rho}_m < 0$ の条件下で，$\left|\widetilde{R}_n\right| > \left|\widetilde{R}_m\right|$ となる確率は(5.5)式となり，$n/m = \beta$ としたとき，価格比 $\widetilde{P}_{t-m-1}/\widetilde{P}_{t-n-1}$ がグラフ1B上のCAまたはBIの区間にある確率を表している。

$$\Pr\left(\left|\widetilde{R}_n\right| > \left|\widetilde{R}_m\right| \middle| sign\left\{\widetilde{R}_m\right\} = sign\left\{\widetilde{R}_n\right\}\right) = 2\int_{(\beta-1)\rho_m}^{+\infty} f\left(\ln\left(\frac{\widetilde{P}_{t-m-1}}{\widetilde{P}_{t-n-1}}\right)\right) d\left(\ln\left(\frac{\widetilde{P}_{t-m-1}}{\widetilde{P}_{t-n-1}}\right)\right) \tag{5.5}$$

つぎに，$\tilde{\rho}_n > 0 > \tilde{\rho}_m$ または $\tilde{\rho}_n < 0 < \tilde{\rho}_m$ の条件下で，$n/m = \beta$ のとき，(3.10)式と(5.2)式より，価格比 $\widetilde{P}_{t-m-1}/\widetilde{P}_{t-n-1}$ の対数の確率分布を求めると，(5.6)式となる。

$$\ln\left(\frac{\widetilde{P}_{t-m-1}}{\widetilde{P}_{t-n-1}}\right) = -\tilde{\rho}_m(1+\beta) \sim N\left((1+\beta)m\mu,\ \left((1+\beta)m\sigma\right)^2\right) \tag{5.6}$$

すなわち，$\ln\left(\widetilde{P}_{t-m-1}/\widetilde{P}_{t-n-1}\right)$ の確率分布は平均 $(1+\beta)m\mu$, 分散 $((1+\beta)m\sigma)^2$ の正規分布に従う。そのとき，(5.6)式から，正規分布密度関数は(5.7)式となる[3)]。

$$f\left(\ln\left(\frac{\widetilde{P}_{t-m-1}}{\widetilde{P}_{t-n-1}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+\beta)m\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{\ln\left(\widetilde{P}_{t-m-1}/\widetilde{P}_{t-n-1}\right) - (1+\beta)m\mu}{(1+\beta)m\sigma}\right\}^2\right] \tag{5.7}$$

(5.7)式から，$\tilde{\rho}_n > 0 > \tilde{\rho}_m$ または $\tilde{\rho}_n < 0 < \tilde{\rho}_m$ の条件下で，$\left|\widetilde{R}_n\right| > \left|\widetilde{R}_m\right|$ となる確率は(5.8)式となり，$n/m = \beta$ としたとき，価格比 $\widetilde{P}_{t-m-1}/\widetilde{P}_{t-n-1}$ がグラフ2B上のCAまたはBIの区間にある確率を表している。

$$\Pr\left(\left|\widetilde{R}_n\right| > \left|\widetilde{R}_m\right| \middle| sign\left\{\widetilde{R}_m\right\} \neq sign\left\{\widetilde{R}_n\right\}\right) = 2\int_{-(1+\beta)|\rho_m|}^{+\infty} f\left(\ln\left(\frac{\widetilde{P}_{t-m-1}}{\widetilde{P}_{t-n-1}}\right)\right) d\left(\ln\left(\frac{\widetilde{P}_{t-m-1}}{\widetilde{P}_{t-n-1}}\right)\right) \tag{5.8}$$

ここで，(5.8)式の確率と(5.5)式の確率を標準正規累積分布関数で表示すると，(5.8)式と(5.5)式の標準正規累積分布関数は一致して，(5.9)式となる。

$$\Pr\left(\left|\widetilde{R}_n\right| > \left|\widetilde{R}_m\right|\right) = 2\int_{\left|\widetilde{R}_m-\mu\right|/\sigma}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz \tag{5.9}$$

横軸に m 期間平均収益率 $\widetilde{R}_m$ の 1% 以上のボラティリティ（標準偏差）σ，縦軸に $\left|\widetilde{R}_n\right| > \left|\widetilde{R}_m\right|$ となる(5.9)式の確率を描いたものがグラフ 4 である。ここで，$\left|\widetilde{R}_m\right|$ は m 期間平均収益率の絶対値を表している。たとえば，R_m のボラティリティが 20% のときに，$\left|\widetilde{R}_n\right| > \left|\widetilde{R}_m\right|$ の確率は $\left|\widetilde{R}_m\right|$ が 1% のとき 96.01%，$\left|\widetilde{R}_m\right|$ が 10% のとき 61.71% である。また，$\left|\widetilde{R}_m\right|$ が 2% のとき，$\left|\widetilde{R}_n\right| > \left|\widetilde{R}_m\right|$ の確率は R_m のボラティリティが 2% のときに 31.73%，$\left|\widetilde{R}_n\right| > \left|\widetilde{R}_m\right|$ の確率は R_m のボラティリティが 20% のときに 92.03% になる。自明のことであるが，$\left|\widetilde{R}_m\right|$ の上昇によって，$\left|\widetilde{R}_n\right| > \left|\widetilde{R}_m\right|$ の可能性は低まり，$\widetilde{R}_m$ のボラティリティが増加するにしたがって，$\left|\widetilde{R}_n\right| > \left|\widetilde{R}_m\right|$ となる確率は高くなることがグラフ 4 を示している。

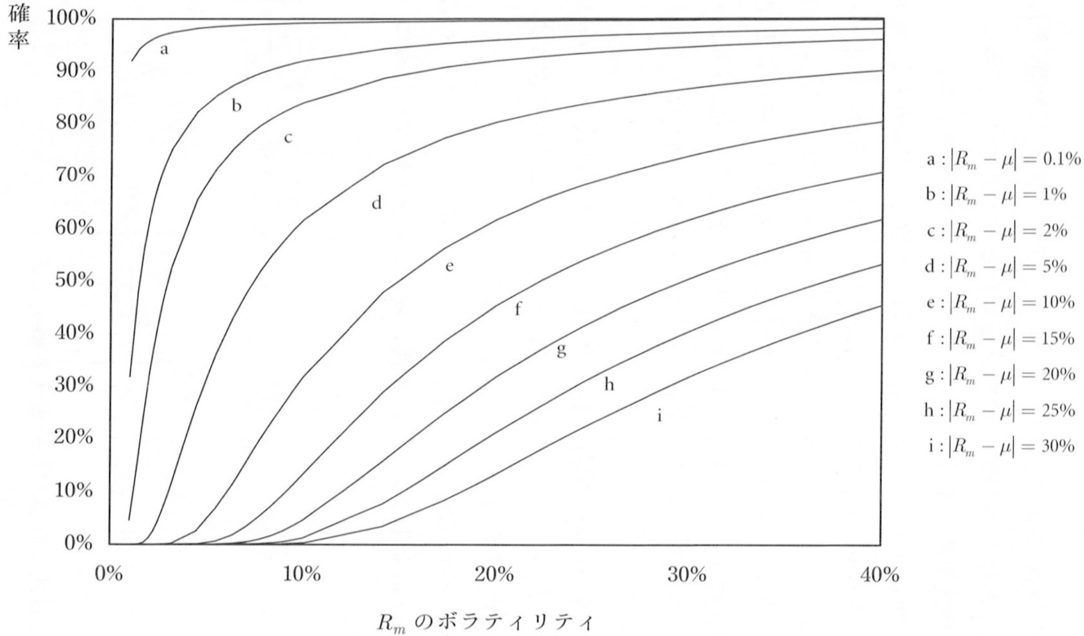
ここで，μ を遠い将来の期待収益率 R_∞ とすると，(2.4)式より，$\mu = R_\infty = 0$ となり，$\left|\widetilde{R}_m\right| = \left|\widetilde{R}_m - \mu\right|_{\mu=R_\infty=0}$ である。また，$\widetilde{R}_m = \mu$ であるときには，確率 100% で $\left|\widetilde{R}_n\right| > \left|\widetilde{R}_m\right|$ となることがわかる。

最後に，(5.9)式で表現される $\left|\widetilde{R}_n\right| > \left|\widetilde{R}_m\right|$ となる確率がパラメータ μ，$\widetilde{R}_m - \mu$，あるいは σ の変化によって，如何に変わるかを考察するために，それぞれで偏微分する。

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\Pr\left(\left|\widetilde{R}_n\right| > \left|\widetilde{R}_m\right|\right) = \frac{\partial}{\partial\left(\widetilde{R}_m - \mu\right)}\Pr\left(\left|\widetilde{R}_n\right| > \left|\widetilde{R}_m\right|\right) = -\sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \exp\left\{\frac{-\left(\widetilde{R}_m - \mu\right)^2}{2\sigma^2}\right\} < 0 \tag{5.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\Pr\left(\left|\widetilde{R}_n\right| > \left|\widetilde{R}_m\right|\right) = \sqrt{\frac{2\left(\widetilde{R}_m - \mu\right)^2}{\pi\sigma^2}} \exp\left\{\frac{-\left(\widetilde{R}_m - \mu\right)^2}{2\sigma^2}\right\} > 0 \tag{5.11}$$

(5.10)式と(5.11)式は直感的に一致する事実である。



グラフ 4 : $|R_n| > |R_m|$ の確率
P_{t-m}/P_{t-n} の確率分布が対数正規分布するケース

6. まとめ

本稿では，ヒストリカル・データを使用して公表された基本統計量から，期間が異なる 2 種類の連続時間型平均収益率とその標本標準偏差から，異なる 2 時点の価格比の対数の確率分布が任意の範囲で一様分布に従うとき，あるいは正規分布に従うときに，n 期間平均収益率の大きさ（絶対値）が m 期間平均収益率（$m < n$）の大きさを上回る可能性を考察した。そのとき，2 種類の連続時間型平均収益率を計算するためには 4 種類の資産価格を必要とするが，両平均収益率を計算するために共通する資産価格を使用した場合には，3 種類の資産価格を必要とする。

そのとき，m 期前の資産価格に対する n 期前の資産価格の比率の対数の確率分布の平均がゼロを中心に任意の値を下限と上限にして一様分布に従うと仮定した場合に，期間が長い平均収益率の大きさが期間が短い平均収益率の大きさを上回る確率を求めた。たとえば，期間比を m 期前の資産価格に対する n 期前の資産価格の比（価格比）の対数が ±0.1 の範囲（価格比が 0.9048 から 1.1052 の範囲）のとき，m 期間平均収益率の絶対値が 1% として，両平均収益率の符号が同じとき，n 期間平均収益率の大きさが m 期間平均収益率の大きさを上回る確率は 60% となり，両平均収益率の符号が異なるときに上回る確率は 40% となる。

また，期間比を 10，価格比の対数が ±0.3 の範囲（価格比が 0.7408 から 1.3499 の範囲）にあり，m 期間平均収益率の絶対値が 3% のとき，両平均収益率の符号が同じとき，n 期間平均収益率の大きさが m 期間平均収益率の大きさを上回る確率は 10% となり，両平均収益率の符号が異なるときに上回る確率はゼロである。このとき，価格比の対数を 0.3 とした任意の値は，m 期前の資産価格を 1,000 としたとき，n 期前の資産価格は 740.82 あるいは

1,349.86 となり，この n 期前の資産価格の値が現実的かどうかの問題が生じる。たとえば，資産価格データが年次データであり，期間比が 10 と大きい場合ならば，上記の n 期前の資産価格は妥当であろうが，日次データの場合には出現しそうにもない値と考えられる。したがって，価格比の対数の確率分布が一様分布に従うと仮定した場合には価格比の対数の範囲と期間比に注意を要する。

他方，m 期前の資産価格に対する n 期前の資産価格の比が対数正規分布に従うと仮定した場合に，n 期間平均収益率の大きさが m 期間平均収益率の大きさを上回る確率は m 期間平均収益率と m 期間収益率のボラティリティに依存して決定し，そこでは，自明であるが，m 期間平均収益率の絶対値が小さいほど，また m 期間収益率のボラティリティが大きいほど，上回る確率は高いと想定される。たとえば，m 期間収益率のボラティリティが 20% のときに n 期間平均収益率の大きさが m 期間平均収益率の大きさを上回る確率は，m 期間平均収益率の絶対値が 1% のとき 96.01%，また m 期間平均収益率の絶対値が 10% のとき 61.71% である。また，m 期間平均収益率の絶対値が 2% のときに n 期間平均収益率の大きさが m 期間平均収益率の大きさを上回る確率は，m 期間収益率のボラティリティが 2% のときに 31.73%，m 期間収益率のボラティリティが 20% のときに 92.03% になる。

本稿では，連続時間型平均収益率についての注意点を明らかにした。今期と前期の資産価格の差を前期の資産価格で除した収益率の相加平均（離散時間型相加平均収益率）と今期と前期の資産価格の差を前期の資産価格で除した収益率の相乗平均（離散時間型相乗平均収益率）についても，機会を得て比較考察したい。

〔注〕

1) R_t と R_{t+1} の確率分布が対数正規分布に従うならば，$R_t R_{t+1}$ の確率分布もまた対数正規分布に従うことが知られている。

2）　価格比 P_{t-m}/P_{t-n} の期待値 $E\left[P_{t-m}/P_{t-n}\right]$ と分散 $Var\left(P_{t-m}/P_{t-n}\right)$ は次式となる。

$$E\left[P_{t-m}/P_{t-n}\right] = \exp\left\{\left((\beta-1)\,\rho_m\sigma\right)^2/2\right\}$$
$$Var\left(P_{t-m}/P_{t-n}\right) = \exp\left((\beta-1)\,\rho_m\sigma\right)^2\left\{\exp\left((\beta-1)\,\rho_m\sigma\right)^2-1\right\}$$

3）　価格比 P_{t-m}/P_{t-n} の期待値 $E\left[P_{t-m}/P_{t-n}\right]$ と分散 $Var\left(P_{t-m}/P_{t-n}\right)$ は次式となる。

$$E\left[P_{t-m}/P_{t-n}\right] = \exp\left\{\left((1+\beta)\,\rho_m\sigma\right)^2/2\right\}$$
$$Var\left(P_{t-m}/P_{t-n}\right) = \exp\left((1+\beta)\,\rho_m\sigma\right)^2\left\{\exp\left((1+\beta)\,\rho_m\sigma\right)^2-1\right\}$$

〔参考文献〕

Richard A. Brealey and Myers, *S.C. Principles of Corporate Finance*, McGraw-Hill/Irwin; 8 edition, New York.