岐阜経済大学論集 30 巻 1 号（1996 年）

〔研究ノート〕

2 変量 VAR(1)–GARCH(1, 1) モデルによる n 期間収益率のボラティリティの計測

中　川　裕　司

1. はじめに

ファイナンスでは将来のリスクをボラティリティまたは分散として推定し，予測することが重要である[1)]。たとえば，Black and Scholes (1973) のオプション・プライシングを使う場合，本源的証券の将来 n 期間の収益率のボラティリティあるいは分散，言い換えれば，現在の情報の下で得られる将来の収益率の条件付分散（conditional variance あるいは heteroskedastic variance）を

得る必要がある[2)]。しかしながらボラティィリティあるいは分散は過去の収益率データから得られる標本標準偏差あるいは標本分散（historical variance）を使って計算される場合が多い。

Akgiray（1989）は1変量 GARCH(p, q) モデル[3)]での資産の n 期間収益率の条件付分散の予測を行っているが，中川（1993）は彼の $p=q=1$ 以上の次数をもつ GARCH モデルでの収益率の条件付分散の予測の間違いを指摘するとともに，1変量 AR(1)–GARCH(1, 1) モデルでの資産の n 期間収益率の条件付分散の計測を行った。中川（1993）のモデルでは，日経先物の始値と終値データを使って導出する日中収益率と夜間収益率が交互に現れる1本の時系列を作り，互いの収益率と分散がその直前のもう一方の収益率と分散から影響を受ける設定であった[4)]。しかしながら，この1変量 AR(1)–GARCH(1, 1) モデルでは TOPIX 先物等の他の資産市場からの影響が全く考慮に入れられないものであった。そこで，この研究ノートではもう一つの市場からの影響を考慮する2変量 VAR(1)–GARCH(1, 1) モデル[5)]を設定して，将来 n 時点と将来 n 期間の期待収益率とそれら将来の収益率にともなうリスクを求めることを目的とする[6)]。ここで考える市場は，たとえば同一取引所での2種類の資産（たとえば，日経225と日経300とTOPIXのうちの2種類の先物），2取引所での2資産（たとえば，東京証券取引所〔TSE〕とシンガポール〔SIMEX〕とシカゴ〔CBOE〕のうちの2取引所での同限月の日経225先物，東京外為市場とニューヨーク市場での円/ドル為替レート）などの始値と終値から計算される日中収益率と夜間収益率を考えることができる。このように考える場合，時点 t を第 t 日，n 期間を n 日間と解釈できる。

次節では2変量 VAR(1)–GARCH(1, 1) モデルの設定と収益率時系列作成上の注意点を述べておく。第3節では，将来の任意の時点と現在から将来の任意の時点までの収益率と期待収益率を導出する。最後の節では，第3節で求めた収益率の条件付分散を導出する。ここで，収益率の条件付分散とは現在までの情報に基づく将来の分散をいう。

2. 2変量 VAR(1)-GARCH(1, 1)モデル

まず同一取引所での2種類の資産あるいは2取引所での同一資産を仮定する。時点tでの第i資産($i=1, 2$)の対数相対価格(log-relative prices)は次式のように定義されるものとする。以下では対数相対価格を収益率とよぶことにする。

$$r_{ij,t} = \ln(p_{ij,t} / p_{i3-j,t+j-2}) \quad \text{for} \quad i, j = 1, 2. \tag{1}$$

ここで,$p_{ij,t}$は時点tでの第i資産の第jファクターの価格を表し,$r_{ij,t}$は時点tでの第i資産の第jファクターの収益率を表すものとする。たとえば,時点tをカレンダー時間を表す第t日と考え,$p_{i1,t}$を第t日の第i資産の始値とし,$p_{i2,t}$を第t日の第i資産の終値とすると,第1ファクターの収益率$r_{i1,t}$は第t日の第i資産の夜間収益率となり,第2ファクターの収益率$r_{i2,t}$は第t日の第i資産の日中収益率となる[7)]。この場合,1資産の任意の1日の収益率は夜間収益率から始まる夜間・日中収益率の2種類から成る1本の時系列であり,(1)式は2資産が存在するために2本の時系列を想定した式である。

次に(1)式に基づき,同一取引所での2種類の資産あるいは2取引所での資産の収益率の相互作用を考慮した2変量 VAR(1)-GARCH(1, 1)モデルが次式である[8)]。(2)式は期待収益率モデル(VAR モデル)であり,(3)式が GARCH モデルである。

$$\mathbf{r}_{it} = \mathbf{c}_i + \mathbf{A}_i \mathbf{r}_{3-i,t+i-2} + \mathbf{e}_{it}, \tag{2}$$

$$\varepsilon_{i1,t} \,|\, \psi_{2,t-1} \sim N(0, h_{i1,t}), \quad \varepsilon_{i2,t} \,|\, \psi_{1,t} \sim N(0, h_{i2,t}),$$

$$E[\varepsilon_{i1,t}\varepsilon_{ij,t+s} \,|\, \psi_{2,t-1}] = E[\varepsilon_{i2,t}\varepsilon_{ij,t+s} \,|\, \psi_{1,t}] = 0,$$

$$E[\varepsilon_{i1,t}\varepsilon_{i2,t} \,|\, \psi_{2,t-1}] = \rho_{i1,i2}\sqrt{h_{i1,t}h_{i2,t}}, \quad E[\varepsilon_{i2,t}\varepsilon_{i1,t+1} \,|\, \psi_{1,t}] = \rho_{i2,i1}\sqrt{h_{i2,t}h_{i1,t+1}},$$

$$\mathbf{H}_{it} = \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i \mathbf{e}^2_{3-i,\,t+i-2} + \mathbf{g}_i \mathbf{H}_{3-i,\,t+i-2}\ , \tag{3}$$

$$\mathbf{r}_{it} = \begin{bmatrix} r_{1i,\,t} \\ r_{2i,\,t} \end{bmatrix},\quad \mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} a_{11i} & a_{12i} \\ a_{21i} & a_{22i} \end{bmatrix},\quad \mathbf{e}_{it} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1i,\,t} \\ \varepsilon_{2i,\,t} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_{it} = \begin{bmatrix} h_{1i,\,t} \\ h_{2i,\,t} \end{bmatrix},\quad \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \end{bmatrix},\quad \mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} \beta_{11i} & \beta_{12i} \\ \beta_{21i} & \beta_{22i} \end{bmatrix},\quad \mathbf{g}_i = \begin{bmatrix} \gamma_{11i} & \gamma_{12i} \\ \gamma_{21i} & \gamma_{22i} \end{bmatrix}$$

$$\text{for}\quad i, j = 1, 2,\quad s = 1, 2, \cdots.$$

ここで,

$$\psi_{1,t} = \{\varepsilon_{i1,t}, \varepsilon_{i2,t-1}, \varepsilon_{i1,t-1}, \cdots\},\quad \psi_{2,t} = \{\varepsilon_{i2,t}, \varepsilon_{i1,t}, \varepsilon_{i2,t-1}, \cdots\}\quad \text{for}\quad i = 1, 2. \tag{4}$$

c_{ij} と α_{ij} $(i, j = 1, 2)$ は定数項であり，a_{ijk} と β_{ijk} と γ_{ijk} $(i, j, k = 1, 2)$ は回帰係数を表す。また $\rho_{i1,i2}$ $(i = 1, 2)$ は第 i 資産の第 1 ファクターの期待収益率モデルの誤差項と第 i 資産の第 2 ファクターの期待収益率モデルの誤差項の間の相関係数を表し[9)]，モデルを簡単にするために時間独立型とする。さらに，$\varepsilon_{ij,t}$ $(i, j = 1, 2)$ は時点 t での第 j 資産の第 i ファクターの期待収益率モデルの誤差項を表し，$\varepsilon_{ij,t-1}$ は時点 t–1 での収益率の残差であり，さらにその自乗である $\varepsilon^2_{ij,t-1}$ を時点 t–1 での収益率のショックを表す。$\psi_{1,t}$ は時点 t での第 1 ファクターの情報集合であり，$\psi_{2,t}$ は時点 t での第 2 ファクターの情報集合を表す。ここで，$E[\cdot \mid \psi_{i,t}] = 0$ $(i = 1, 2)$ は時点 t での第 i ファクターの情報集合 $\psi_{i,t}$ の下での条件付期待値を表している。さらに，$h_{ij,t}$ $(i, j = 1, 2)$ は情報集合 $\psi_{3-j,t+j-2}$ の下での時点 t の第 i 資産の第 j ファクターの期待収益率モデルの誤差項の条件付分散 $E[\varepsilon^2_{ij,t} \mid \psi_{3-j,t+j-2}]$ であり，$N(0, h_{ij,t})$ $(i, j = 1, 2)$ は平均がゼロで分散が $h_{ij,t}$ である時間依存型正規分布関数を表す。

(2)式は第 i 資産の第 2 ファクターの収益率（$r_{i2,t}$）がその直前の 2 資産の第 1 ファクターの収益率（$r_{11,t-1}$ と $r_{21,t-1}$）から影響を受け，また第 i 資産の第 1 ファクターの収益率（$r_{i1,t}$）がその直前の 2 資産の第 2 ファクターの収

益率（$r_{12,t}$ と $r_{22,t}$）から影響を受ける VAR モデルである。同様に，(3)式は期待収益率モデルの誤差項の条件付分散がその直前の 2 資産の収益率のショックと期待収益率モデルの誤差項の条件付分散から影響を受ける GARCH モデルである。これまでの例に従って，(2)式と(3)式を視覚的に捕らえるために，(1)式を使った収益率の時系列作成の点から 3 つのケースに分けて時間軸を横にとった図にまとめておく。

2.1 開いている 2 資産市場の時間帯が重なるケース

まず収益率の時系列作成上，最も簡単なケースである同一取引所内の 2 資産の収益率（たとえば，日経 225 と日経 300 と TOPIX のうちの 2 種類の先物）を選択した場合の，2 資産収益率と誤差項の条件付分散の相互作用関係を図 1 で示しておく。このケースは同一取引所で，2 資産市場の開いている時間帯が重なる場合のものである。

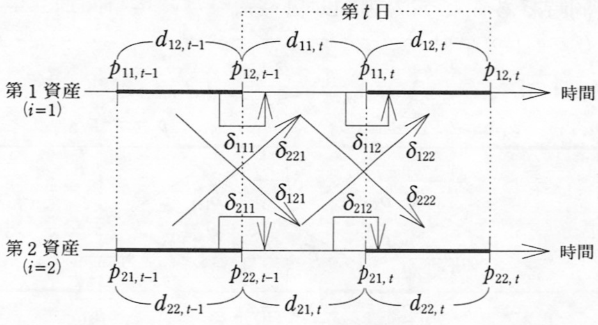

図 1

ここで，2 本の水平軸がそれぞれ第 1 資産と第 2 資産の時間軸であり，太線は市場が開いている時間帯であり，それぞれの時間軸に垂直な 4 本の線が観測時点を表している。それらの観測時点で価格 $p_{ij,t}$ が観測され，隣接する 2 時点の価格から(1)式を使った収益率 $r_{ij,t}$ が計算される。図中の $d_{ij,t}$ は $r_{ij,t}$，$h_{ij,t}$ または $\varepsilon^2_{ij,t}$ $(i, j=1,2)$ を表し，δ_{ijk} は a_{ijk}，β_{ijk} または

$\gamma_{ijk}\,(i,j,k=1,2)$ の回帰係数を表す。また2種類の資産の時間軸で囲まれた中に矢印で示される線は(2)式と(3)式で設定された収益率（$r_{ij,t}$）あるいは期待収益率モデルの誤差項の条件付分散（$h_{ij,t}$）の因果関係を表している。以下の図中の記号も同様に解釈されたい。

2.2　開いている2資産市場の時間帯が重ならないケース

2資産の収益率（たとえば，東京証券取引所〔TSE〕とシカゴ証券取引所〔CBOE〕の同限月の日経225先物，東京外為市場とニューヨーク市場での円/ドル為替レート）を選択した場合の収益率と誤差項の条件付分散の相互作用関係を図2で示しておく。このケースは開いている2資産市場の時間帯が重ならない場合のものである。ここで，終値→終値の表現の中で，最初の太字の終値が実際に観測された時点であり，2資産市場がともに開いていない時間帯が存在するかぎり，便宜上1資産市場の終わる時間と他資産市場の始まる時間が同時であるように設定している。

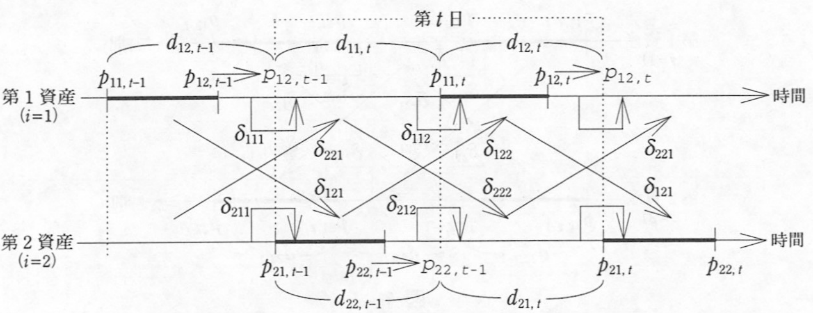

図 2

2.3　開いている2資産市場の時間帯が一部重なるケース

2資産の収益率（たとえば，東京証券取引所〔TSE〕とシンガポール証券取引所〔SIMEX〕の同限月の日経225先物）を選択した場合の収益率と誤差項の条件付

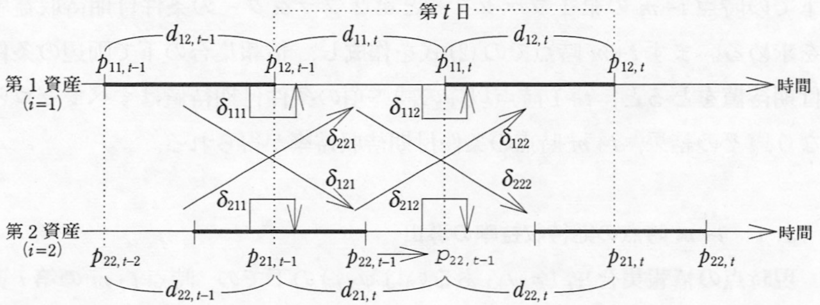

図 3

分散の相互作用関係の一例を図 3 で示しておく。2 つのケースは収益率の時系列作成上，観測時点をどのように採るかにより異なってくるものの，第 1 資産を主要資産と想定したケースである。ここで留意すべきは第 1 資産市場の終わる時点で，第 2 資産の価格($p_{21,t}$)が観測可能でなければならない点である。

3. n 期間収益率の条件付期待値

本節では，現時点までの情報に基づく，任意の資産の任意のファクターについての将来の任意の時点と現在から将来の任意の時点までの収益率と期待収益率を導出する。このとき，たとえば日経 225 先物と TOPIX 先物の 2 資産を考えた場合，VAR(1)モデルに基づきそれぞれの収益率の相互作用を考慮して，将来のある日の日経 225（または TOPIX）先物の日中（または夜間）収益率の予測値を計算することができる。さらにその収益率の予測値の誤差も計算可能である。また現在から将来のある日までの日中（または夜間）収益率[10)]の予測値とその予測値の誤差を求めることができる。

まず(2)式の期待収益率モデルである VAR(1)モデルに着目して，資産の収益率の条件付期待値を求めることにする。そこで，現時点の情報集合の

下での時点 $t+m$ の第 1 ファクターと第 2 ファクターの条件付期待収益率を求める。まず $t+m$ 時点での(2)式を作成し，情報集合の下で両辺の条件付期待値をとると，$t+1$ 時点以降の誤差項の条件付期待値はすべてゼロとなり，その結果，$t+m$ 時点の条件付期待収益率が得られる。

3.1　$t+m$ 時点の期待収益率の導出

現時点の情報集合 Ψ_t $(=\psi_{1,t}$ あるいは $\psi_{2,t})$ の下での，時点 $t+m$ の第 i 資産の第 j ファクターの条件付期待収益率 $E[\tilde{r}_{ij,\,t+m}\,|\,\Psi_t]$ $(i, j=1,2,\ m\geq 1)$ はそれぞれ(5)式となる。

$$
\begin{bmatrix} E[\tilde{r}_{11,\,t+m}\,|\,\Psi_t] \\ E[\tilde{r}_{21,\,t+m}\,|\,\Psi_t] \end{bmatrix} =
\begin{cases}
\begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \end{bmatrix} + (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^m \begin{bmatrix} r_{11,\,t}-\mu_{11} \\ r_{21,\,t}-\mu_{21} \end{bmatrix} & \text{if} \quad \Psi_t=\psi_{1,t} \\
\begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \end{bmatrix} + (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-1} \begin{bmatrix} c_{11}-\mu_{11} \\ c_{21}-\mu_{21} \end{bmatrix} + (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-1}\mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} r_{12,\,t} \\ r_{22,\,t} \end{bmatrix} & \\
 & \text{if} \quad \Psi_t=\psi_{2,t}
\end{cases}
$$

$$
\begin{bmatrix} E[\tilde{r}_{12,\,t+m}\,|\,\Psi_t] \\ E[\tilde{r}_{22,\,t+m}\,|\,\Psi_t] \end{bmatrix} =
\begin{cases}
\begin{bmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{22} \end{bmatrix} + (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^m \begin{bmatrix} c_{12}-\mu_{12} \\ c_{22}-\mu_{22} \end{bmatrix} + (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^m\mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} r_{11,\,t} \\ r_{21,\,t} \end{bmatrix} & \\
 & \text{if} \quad \Psi_t=\psi_{1,t} \\
\begin{bmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{22} \end{bmatrix} + (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^m \begin{bmatrix} r_{12,\,t}-\mu_{12} \\ r_{22,\,t}-\mu_{22} \end{bmatrix} & \text{if} \quad \Psi_t=\psi_{2,t}
\end{cases}
\tag{5}
$$

ここで

$$
\begin{bmatrix} \mu_{1i} \\ \mu_{2i} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \lim_{m\to\infty} E[\tilde{r}_{1i,\,t+m}\,|\,\Psi_t] \\ \lim_{m\to\infty} E[\tilde{r}_{2i,\,t+m}\,|\,\Psi_t] \end{bmatrix} = (\mathbf{I}_2-\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{3-i})^{-1}\left[\begin{bmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \end{bmatrix} + \mathbf{A}_i \begin{bmatrix} c_{1,\,3-i} \\ c_{2,\,3-i} \end{bmatrix}\right] \quad \text{for} \quad i=1,2.
\tag{6}
$$

$$
(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^0 \equiv \mathbf{I}_2
$$

$\mathbf{I}_2$ は 2×2 の単位行列であり，上付き添え字 -1 は逆行列を表す。μ_{ij} $(i, j=1,2)$ は無限の将来に期待される収益率を表し，以下では無条件期待収益率とよぶことにする。（証明は **Appendix A** である。）ここで，$p_{11,t}$ $(p_{21,t})$ を観測

し，かつ $p_{12,t}$ ($p_{22,t}$) をまだ観測していない時間に現時点があれば，現時点の情報集合は $\psi_{1,t}$ となり，時点 $t+m$ での第 i 資産の第 j ファクターの期待収益率 $E[\widetilde{r}_{ij,t+m}|\psi_{1,t}]$ で表される。また，すでに $p_{12,t}$ ($p_{22,t}$) を観測し，かつ $p_{11,t+1}$ ($p_{21,t+1}$) をまだ観測していない時間に現時点があれば，現時点の情報集合は $\psi_{2,t}$ となり，時点 $t+m$ での第 i 資産の第 j ファクターの条件付期待収益率 $E[\widetilde{r}_{ij,t+m}|\psi_{2,t}]$ で表される。この議論は以下のすべての式に共通するものである。

次に，現時点の情報集合の下での時点 $t+m$ の条件付収益率を求めることにする。この時点 $t+m$ の収益率は(5)式で求めた時点 $t+m$ の期待収益率に，現時点から時点 $t+m$ までの期待収益率モデルのすべての誤差項を加えたものになる。

3.2　$t+m$ 時点の収益率の導出

現時点の情報集合 Ψ_t ($=\psi_{1,t}$ あるいは $\psi_{2,t}$) の下での，時点 $t+m$ の第 i 資産の第 j ファクターの条件付収益率 $\widetilde{r}_{ij,t+m}|\Psi_t$ ($i, j=1, 2,\ m\geq 1$) はそれぞれ(7)式となる。ここで，$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{-1}\equiv\mathbf{0}$ であり，各要素はすべてゼロである。(証明は **Appendix B** である。)

またもう一つの視点から，現時点の情報集合の下での，$t+m$ 時点の第 i 資産の条件付収益率を求める。この収益率は第 i 資産の $t+m$ 時点の 1 単位時間の収益率 (たとえば，これまでの例に従うと，第 $t+m$ 日の 1 日間の収益率，すなわち第 $t+m$ 日の夜間収益率＋日中収益率) を意味し，これは(7)式で求めた時点 $t+m$ の第 i 資産の第 j ファクターの条件付収益率を j について合計した収益率である。(8)式は現時点の情報集合 Ψ_t ($=\psi_{1,t}$ あるいは $\psi_{2,t}$) の下での，時点 $t+m$ の第 i 資産の条件付収益率 $\widetilde{r}_{i,t+m}|\Psi_t$ ($\equiv\widetilde{r}_{i1,t+m}|\Psi_t+\widetilde{r}_{i2,t+m}|\Psi_t$, $i=1, 2,\ m\geq 1$) である。ここで，現時点の情報集合の下での，$t+m$ 時点の第 i 資産の条件付期待収益率 $E[\widetilde{r}_{i,t+m}|\Psi_t]$ ($\equiv\widetilde{r}_{i1,t+m}|\Psi_t+\widetilde{r}_{i2,t+m}|\Psi_t$，$i=1, 2,\ m\geq 1$) を求めたいなら，情報集合 Ψ_t ($=\psi_{1,t}$ あるいは $\psi_{2,t}$) の下で，(8)式の

$$
\begin{bmatrix} \tilde{r}_{11,t+m} \mid \Psi_t \\ \tilde{r}_{21,t+m} \mid \Psi_t \end{bmatrix} =
\begin{cases}
\begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \end{bmatrix} + (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^m \begin{bmatrix} r_{11,t} - \mu_{11} \\ r_{21,t} - \mu_{21} \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{m} (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j} \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{11,t+j} \mid \psi_{1,t} \\ \tilde{\varepsilon}_{21,t+j} \mid \psi_{1,t} \end{bmatrix} & \\
\quad + \sum_{j=0}^{m} (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j-1}\mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{12,t+j} \mid \psi_{1,t} \\ \tilde{\varepsilon}_{22,t+j} \mid \psi_{1,t} \end{bmatrix} & \text{if} \quad \Psi_t = \psi_{1,t} \\
\begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \end{bmatrix} + (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^m \begin{bmatrix} c_{11} - \mu_{11} \\ c_{21} - \mu_{21} \end{bmatrix} + (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-1}\mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} r_{12,t} \\ r_{22,t} \end{bmatrix} & \\
\quad + \sum_{j=1}^{m} \left[(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j} \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{11,t+j} \mid \psi_{2,t} \\ \tilde{\varepsilon}_{21,t+j} \mid \psi_{2,t} \end{bmatrix} + (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j-1}\mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{12,t+j} \mid \psi_{2,t} \\ \tilde{\varepsilon}_{22,t+j} \mid \psi_{2,t} \end{bmatrix} \right] & \text{if} \quad \Psi_t = \psi_{2,t}
\end{cases}
$$

$$
\begin{bmatrix} \tilde{r}_{12,t+m} \mid \Psi_t \\ \tilde{r}_{22,t+m} \mid \Psi_t \end{bmatrix} =
\begin{cases}
\begin{bmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{22} \end{bmatrix} + (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^m \begin{bmatrix} c_{12} - \mu_{12} \\ c_{22} - \mu_{22} \end{bmatrix} + (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^m\mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} r_{11,t} \\ r_{21,t} \end{bmatrix} & \\
\quad + \sum_{j=1}^{m} (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-j}\mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{11,t+j} \mid \psi_{1,t} \\ \tilde{\varepsilon}_{21,t+j} \mid \psi_{1,t} \end{bmatrix} + \sum_{j=0}^{m} (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-j} \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{12,t+j} \mid \psi_{1,t} \\ \tilde{\varepsilon}_{22,t+j} \mid \psi_{1,t} \end{bmatrix} & \text{if} \quad \Psi_t = \psi_{1,t} \\
\begin{bmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{22} \end{bmatrix} + (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^m \begin{bmatrix} r_{12,t} - \mu_{12} \\ r_{22,t} - \mu_{22} \end{bmatrix} & \\
\quad + \sum_{j=1}^{m} \left[(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-j}\mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{11,t+j} \mid \psi_{2,t} \\ \tilde{\varepsilon}_{21,t+j} \mid \psi_{2,t} \end{bmatrix} + (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-j} \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{12,t+j} \mid \psi_{2,t} \\ \tilde{\varepsilon}_{22,t+j} \mid \psi_{2,t} \end{bmatrix} \right] & \text{if} \quad \Psi_t = \psi_{2,t}
\end{cases}
\tag{7}
$$

$$
\begin{bmatrix} \tilde{r}_{1,t+m} \mid \Psi_t \\ \tilde{r}_{2,t+m} \mid \Psi_t \end{bmatrix} =
\begin{cases}
(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^m \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{2} (\mathbf{I}_2 - (\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{3-i})^m) \begin{bmatrix} \mu_{1i} \\ \mu_{2i} \end{bmatrix} & \\
\quad + (\mathbf{I}_2 + \mathbf{A}_2)\,(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^m \begin{bmatrix} r_{11,t} \\ r_{21,t} \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{m} ((\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j} + (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-j-1}\mathbf{A}_2) \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{11,t+j} \mid \psi_{1,t} \\ \tilde{\varepsilon}_{21,t+j} \mid \psi_{1,t} \end{bmatrix} & \\
\quad + \sum_{j=0}^{m} ((\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j-1}\mathbf{A}_1 + (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-j}) \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{12,t+j} \mid \psi_{1,t} \\ \tilde{\varepsilon}_{22,t+j} \mid \psi_{1,t} \end{bmatrix} & \text{if} \quad \Psi_t = \psi_{1,t} \\
(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^m \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{2} (\mathbf{I}_2 - (\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{3-i})^m) \begin{bmatrix} \mu_{1i} \\ \mu_{2i} \end{bmatrix} + (\mathbf{I}_2 + \mathbf{A}_2)(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-1}\mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} r_{12,t} \\ r_{22,t} \end{bmatrix} & \\
\quad + \sum_{j=1}^{m} ((\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j} + (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-j}\mathbf{A}_2) \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{11,t+j} \mid \psi_{2,t} \\ \tilde{\varepsilon}_{21,t+j} \mid \psi_{2,t} \end{bmatrix} & \\
\quad + \sum_{j=1}^{m} ((\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-j} + (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j-1}\mathbf{A}_1) \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{12,t+j} \mid \psi_{2,t} \\ \tilde{\varepsilon}_{22,t+j} \mid \psi_{2,t} \end{bmatrix} & \text{if} \quad \Psi_t = \psi_{2,t}
\end{cases}
\tag{8}
$$

両辺の条件付期待値を求めればよい。そのとき，(8)式の右辺のすべての誤差項はゼロとなる。

収益率に関する最後のものは，将来 n 期間の収益率を求めることである。より正確には，現時点の情報集合の下で，時点 $t+1$ から将来の時点 $t+n$ までの n 期間の条件付収益率を求めることである。n 期間条件付収益率の導出は(8)式の m を 1 から順に n まで加えることにより得られる。

3.3 n 期間収益率の導出

現時点の情報集合 Ψ_t ($=\psi_{1,t}$ あるいは $\psi_{2,t}$)の下での，第 i 資産の第 j ファクターの将来 n 期間の条件付収益率 $\widetilde{R}_{ij,n}\,|\,\Psi_t$ ($\equiv \sum_{m=1}^{n}\widetilde{r}_{ij,t+m}\,|\,\Psi_t$， $i,j=1,2$， $m\geq 1$) はそれぞれ次式となる。

$$
\begin{bmatrix}\widetilde{R}_{11,n}\,|\,\Psi_t\\ \widetilde{R}_{21,n}\,|\,\Psi_t\end{bmatrix}=\left\{\begin{array}{l}
\begin{bmatrix}n\mu_{11}\\ n\mu_{21}\end{bmatrix}+\sum_{m=1}^{n}\Bigg[(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m}\begin{bmatrix}r_{11,t}-\mu_{11}\\ r_{21,t}-\mu_{21}\end{bmatrix}\\
\qquad+\sum_{j=1}^{m}(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j}\begin{bmatrix}\widetilde{\varepsilon}_{11,t+j}\,|\,\psi_{1,t}\\ \widetilde{\varepsilon}_{21,t+j}\,|\,\psi_{1,t}\end{bmatrix}+\sum_{j=0}^{m}(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j-1}\mathbf{A}_1\begin{bmatrix}\widetilde{\varepsilon}_{12,t+j}\,|\,\psi_{1,t}\\ \widetilde{\varepsilon}_{22,t+j}\,|\,\psi_{1,t}\end{bmatrix}\Bigg]\\
\hfill \text{if}\quad \Psi_t=\psi_{1,t}\\
\begin{bmatrix}n\mu_{11}\\ n\mu_{21}\end{bmatrix}+\sum_{m=1}^{n}\Bigg[(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-1}\begin{bmatrix}c_{11}-\mu_{11}\\ c_{21}-\mu_{21}\end{bmatrix}+(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-1}\mathbf{A}_1\begin{bmatrix}r_{12,t}\\ r_{22,t}\end{bmatrix}\\
\qquad+\sum_{j=1}^{m}\Bigg[(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j}\begin{bmatrix}\widetilde{\varepsilon}_{11,t+j}\,|\,\psi_{2,t}\\ \widetilde{\varepsilon}_{21,t+j}\,|\,\psi_{2,t}\end{bmatrix}+(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j-1}\mathbf{A}_1\begin{bmatrix}\widetilde{\varepsilon}_{12,t+j}\,|\,\psi_{2,t}\\ \widetilde{\varepsilon}_{22,t+j}\,|\,\psi_{2,t}\end{bmatrix}\Bigg]\Bigg]\\
\hfill \text{if}\quad \Psi_t=\psi_{2,t}
\end{array}\right.
$$

$$
\begin{bmatrix}\widetilde{R}_{12,n}\,|\,\Psi_t\\ \widetilde{R}_{22,n}\,|\,\Psi_t\end{bmatrix}=\left\{\begin{array}{l}
\begin{bmatrix}n\mu_{12}\\ n\mu_{22}\end{bmatrix}+\sum_{m=1}^{n}\Bigg[(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m}\begin{bmatrix}c_{12}-\mu_{12}\\ c_{22}-\mu_{22}\end{bmatrix}+(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m}\mathbf{A}_2\begin{bmatrix}r_{11,t}\\ r_{21,t}\end{bmatrix}\\
\qquad+\sum_{j=1}^{m}(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-j}\mathbf{A}_2\begin{bmatrix}\widetilde{\varepsilon}_{11,t+j}\,|\,\psi_{1,t}\\ \widetilde{\varepsilon}_{21,t+j}\,|\,\psi_{1,t}\end{bmatrix}+\sum_{j=0}^{m}(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-j}\begin{bmatrix}\widetilde{\varepsilon}_{12,t+j}\,|\,\psi_{1,t}\\ \widetilde{\varepsilon}_{22,t+j}\,|\,\psi_{1,t}\end{bmatrix}\Bigg]\\
\hfill \text{if}\quad \Psi_t=\psi_{1,t}\\
\begin{bmatrix}n\mu_{12}\\ n\mu_{22}\end{bmatrix}+\sum_{m=1}^{n}\Bigg[(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m}\begin{bmatrix}r_{12,t}-\mu_{12}\\ r_{22,t}-\mu_{22}\end{bmatrix}\\
\qquad+\sum_{j=1}^{m}\Bigg[(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-j}\mathbf{A}_2\begin{bmatrix}\widetilde{\varepsilon}_{11,t+j}\,|\,\psi_{2,t}\\ \widetilde{\varepsilon}_{21,t+j}\,|\,\psi_{2,t}\end{bmatrix}+(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-j}\begin{bmatrix}\widetilde{\varepsilon}_{12,t+j}\,|\,\psi_{2,t}\\ \widetilde{\varepsilon}_{22,t+j}\,|\,\psi_{2,t}\end{bmatrix}\Bigg]\Bigg]\\
\hfill \text{if}\quad \Psi_t=\psi_{2,t}
\end{array}\right. \tag{9}
$$

ここで，現時点の情報集合の下での，第 i 資産の第 j ファクターの将来 n 期

間の条件付期待収益率 $E[\widetilde{R}_{ij,n}\,|\,\Psi_t]\ (\equiv E\left[\sum_{m=1}^{n}\widetilde{r}_{ij,t+m}\,|\,\Psi_t\right],\ i,j=1,2,\ m\geq 1)$ を求めたいなら，情報集合 Ψ_t $(=\psi_{1,t}$ あるいは $\psi_{2,t})$ の下で，(9)式の両辺の条件付期待値を求めればよい。そのとき，(9)式の右辺のすべての誤差項はゼロとなる。

またもう一つの視点から，現時点の情報集合の下での，第 i 資産の将来 n 期間の条件付収益率を求める。この収益率は(8)式で求めた時点 $t+m$ の第 i 資産の条件付収益率を $m=1$ から $m=n$ について合計する $\sum_{m=1}^{n}(\widetilde{r}_{i1,t+m}\,|\,\Psi_t+\widetilde{r}_{i2,t+m}\,|\,\Psi_t)$ か，あるいは(9)式を j について加えた収益率 $\sum_{j=1}^{2}\widetilde{R}_{ij,n}\,|\,\Psi_t$ として導出できる。(10)式は現時点の情報集合 Ψ_t $(=\psi_{1,t}$ あるいは $\psi_{2,t})$ の下での，将来 n 期間の第 i 資産の条件付収益率 $\widetilde{R}_{in}\,|\,\Psi_t$ $(\equiv\sum_{m=1}^{n}(\widetilde{r}_{i1,t+m}\,|\,\Psi_t+\widetilde{r}_{i2,t+m}\,|\,\Psi_t)=\sum_{j=1}^{2}\widetilde{R}_{ij,n}\,|\,\Psi_t,\ i,j=1,2,\ m\geq 1)$ である。

$$
\begin{bmatrix}\widetilde{R}_{1n}\,|\,\Psi_t\\ \widetilde{R}_{2n}\,|\,\Psi_t\end{bmatrix}=
\begin{cases}
\begin{bmatrix}n(\mu_{11}+\mu_{12})\\ n(\mu_{21}+\mu_{22})\end{bmatrix}\\
\quad+\sum_{m=1}^{n}\left[(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^m\begin{bmatrix}c_{12}-\mu_{12}\\ c_{22}-\mu_{22}\end{bmatrix}-(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^m\begin{bmatrix}\mu_{11}\\ \mu_{21}\end{bmatrix}+(\mathbf{I}_2+\mathbf{A}_2)\,(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^m\begin{bmatrix}r_{11,t}\\ r_{21,t}\end{bmatrix}\right.\\
\quad+\sum_{j=1}^{m}((\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j}+(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-j}\mathbf{A}_2)\begin{bmatrix}\widetilde{\varepsilon}_{11,t+j}\,|\,\psi_{1,t}\\ \widetilde{\varepsilon}_{21,t+j}\,|\,\psi_{1,t}\end{bmatrix}\\
\quad\left.+\sum_{j=0}^{m}((\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-j}+(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j}\mathbf{A}_1)\begin{bmatrix}\widetilde{\varepsilon}_{12,t+j}\,|\,\psi_{1,t}\\ \widetilde{\varepsilon}_{22,t+j}\,|\,\psi_{1,t}\end{bmatrix}\right] & \text{if}\quad \Psi_t=\psi_{1,t}\\
\begin{bmatrix}n(\mu_{11}+\mu_{12})\\ n(\mu_{21}+\mu_{22})\end{bmatrix}\\
\quad+\sum_{m=1}^{n}\left[(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-1}\begin{bmatrix}c_{11}-\mu_{11}\\ c_{21}-\mu_{21}\end{bmatrix}-(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^m\begin{bmatrix}\mu_{12}\\ \mu_{22}\end{bmatrix}+(\mathbf{I}_2+\mathbf{A}_2)\,(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-1}\mathbf{A}_1\begin{bmatrix}r_{12,t}\\ r_{22,t}\end{bmatrix}\right.\\
\quad+\sum_{j=1}^{m}\left[((\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j}+(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-j}\mathbf{A}_2)\begin{bmatrix}\widetilde{\varepsilon}_{11,t+j}\,|\,\psi_{2,t}\\ \widetilde{\varepsilon}_{21,t+j}\,|\,\psi_{2,t}\end{bmatrix}\right.\\
\quad\left.\left.+((\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j-1}+(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-j})\begin{bmatrix}\widetilde{\varepsilon}_{12,t+j}\,|\,\psi_{2,t}\\ \widetilde{\varepsilon}_{22,t+j}\,|\,\psi_{2,t}\end{bmatrix}\right]\right] & \text{if}\quad \Psi_t=\psi_{2,t}
\end{cases}
\tag{10}
$$

次節では，本節で求めた様々の収益率の条件付分散を求めることにする。

4. n 期間収益率の条件付分散

本節では，現時点までの情報に基づく，任意の資産の任意のファクターについての将来の任意の時点と現在から将来の任意の時点までの収益率の分散（ショック）を導出する。このとき，たとえば日経225とTOPIXの2株価指数を考えた場合，GARCHモデルに基づき，将来のある日の日経225（またはTOPIX）の収益率の分散と，現在から将来のある日までの収益率の分散を計算することができる。特に，後者の分散はオプション・プライシング（たとえば，Black-Scholes公式）を使ったオプション価格の理論値を求めるときに必ず必要になる。さて，(3)式の収益率のショックのモデルであるGARCH(1, 1)モデルに着目して，資産の収益率の条件付分散を求めることにする。そこで，まず現時点の情報集合の下での $t+m$ 時点での(3)式を作成し，時点 $t+m$ の第1ファクターと第2ファクターの収益率の条件付分散を求める。

4.1 $t+m$ 時点のGARCHモデルの誤差項の無条件分散の導出

現時点の情報集合 Ψ_t $(=\psi_{1,t}$ あるいは $\psi_{2,t})$ の下での，時点 $t+m$ の第 i 資産の第 j ファクターの収益率のショックの条件付分散 $\mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{ij,t+m}\,|\,\Psi_t)$ $(i, j = 1, 2,$ $m \geq 1)$ はそれぞれ(11)式となる。

$$\begin{bmatrix}\mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{11,t+m}\,|\,\Psi_t)\\ \mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{21,t+m}\,|\,\Psi_t)\end{bmatrix}=\begin{cases}\begin{bmatrix}\sigma_{11}^2\\ \sigma_{21}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{m-1}\begin{bmatrix}\alpha_{11}-\sigma_{11}^2\\ \alpha_{21}-\sigma_{21}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{m-1}\mathbf{B}_1\begin{bmatrix}h_{12,t}\\ h_{22,t}\end{bmatrix} & \text{if}\quad \Psi_t=\psi_{1,t}\\ \begin{bmatrix}\sigma_{11}^2\\ \sigma_{21}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{m-1}\begin{bmatrix}h_{11,t+1}-\sigma_{11}^2\\ h_{21,t+1}-\sigma_{21}^2\end{bmatrix} & \text{if}\quad \Psi_t=\psi_{2,t}\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}\mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{12,t+m}\,|\,\Psi_t)\\ \mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{22,t+m}\,|\,\Psi_t)\end{bmatrix}=\begin{cases}\begin{bmatrix}\sigma_{12}^2\\ \sigma_{22}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)^{m}\begin{bmatrix}h_{12,t}-\sigma_{12}^2\\ h_{22,t}-\sigma_{22}^2\end{bmatrix} & \text{if}\quad \Psi_t=\psi_{1,t}\\ \begin{bmatrix}\sigma_{12}^2\\ \sigma_{22}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)^{m-1}\begin{bmatrix}\alpha_{12}-\sigma_{12}^2\\ \alpha_{22}-\sigma_{22}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)^{m-1}\mathbf{B}_2\begin{bmatrix}h_{11,t+1}\\ h_{21,t+1}\end{bmatrix} & \text{if}\quad \Psi_t=\psi_{2,t}\end{cases} \tag{11}$$

ここで

$$\mathbf{B}_i \equiv \begin{bmatrix} \beta_{11i}+\gamma_{11i} & \beta_{12i}+\gamma_{12i} \\ \beta_{21i}+\gamma_{21i} & \beta_{22i}+\gamma_{22i} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{1i}^2 \\ \sigma_{2i}^2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \lim_{j\to\infty} \mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{1i,t+j} \mid \Psi_t) \\ \lim_{j\to\infty} \mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{2i,t+j} \mid \Psi_t) \end{bmatrix} = (\mathbf{I}_2 - \mathbf{B}_i\mathbf{B}_{3-i})^{-1}\left[\begin{bmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \end{bmatrix} + \mathbf{B}_i \begin{bmatrix} \alpha_{1,3-i} \\ \alpha_{2,3-i} \end{bmatrix}\right] \quad \text{for} \quad i=1,2. \tag{12}$$

ここで，$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{-1} \equiv \mathbf{0}$ であり，各要素はすべてゼロであり，$(\mathbf{B}_i\mathbf{B}_{3-i})^0 \equiv \mathbf{I}_2$ $(i=1,2)$ である。σ_{ij}^2 $(i=1,2)$ は無限の将来に発生する誤差項の分散を表し，以下では誤差項の無条件分散とよぶことにする。$h_{11,t+1}$ と $h_{21,t+1}$ は情報集合 $\psi_{2,t}$ の下での(3)式の既知のデータから得られる。（証明は **Appendix C** である。）

次に，現時点の情報集合の下での時点 $t+m$ の収益率の条件付分散を求めることにする。そこでまず，(7)式から(5)式を引き自乗したものが時点 $t+m$ の収益率の条件付分散 $\mathrm{Var}(\tilde{r}_{ij,t+m} \mid \Psi_t)$ となる[11]。

4.2 $t+m$ 時点の収益率の条件付分散の導出

現時点の情報集合 Ψ_t $(=\psi_{1,t}$ あるいは $\psi_{2,t})$ の下での，時点 $t+m$ の第 i 資産の第 j ファクターの条件付収益率 $\mathrm{Var}(\tilde{r}_{ij,t+s} \mid \Psi_t)$ $(i, j=1,2,\ m\geq 1)$ はそれぞれ(13)式となる。ここで，$(\mathbf{B}_i\mathbf{B}_{3-i})^0 \equiv \mathbf{I}_2$ $(i=1,2)$ である。

またもう一つの視点から，現時点の情報集合の下での，$t+m$ 時点の第 i 資産の収益率の条件付分散を求める。この分散は(13)式で求めた時点 $t+m$ の第 i 資産の第 j ファクターの収益率の条件付分散を j について合計した分散である。(14)式は現時点の情報集合 Ψ_t $(=\psi_{1,t}$ あるいは $\psi_{2,t})$ の下での，時点 $t+m$ の第 i 資産の収益率の条件付分散 $\mathrm{Var}(\tilde{r}_{i,t+m} \mid \Psi_t)$ $(\equiv \mathrm{Var}(\tilde{r}_{i1,t+m} + \tilde{r}_{i2,t+m} \mid \Psi_t),\ i=1,2,\ m\geq 1)$ である。

収益率の分散に関する最後のものは，将来 n 期間の収益率の条件付分散を求めることである。n 期間収益率の条件付分散の導出は(14)式の m を 1 から順に n まで加えることにより得られる。

$$
\begin{bmatrix} \mathrm{Var}(\widetilde{r}_{11,t+m} \mid \Psi_t) \\ \mathrm{Var}(\widetilde{r}_{21,t+m} \mid \Psi_t) \end{bmatrix} = \begin{cases}
\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \left[(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{2(m-j)} \left[\begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 \\ \sigma_{21}^2 \end{bmatrix} + (\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1} \begin{bmatrix} \alpha_{11} - \sigma_{11}^2 \\ \alpha_{21} - \sigma_{21}^2 \end{bmatrix} + (\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1}\mathbf{B}_1 \begin{bmatrix} h_{12,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix} \right]\right] \\
\quad + \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \left[((\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j-1}\mathbf{A}_1)^2 \left[\begin{bmatrix} \sigma_{12}^2 \\ \sigma_{22}^2 \end{bmatrix} + (\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)^{j} \begin{bmatrix} h_{12,t} - \sigma_{12}^2 \\ h_{22,t} - \sigma_{22}^2 \end{bmatrix} \right]\right] & \text{if} \quad \Psi_t = \psi_{1,t} \\
\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \left[(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{2(m-j)} \left[\begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 \\ \sigma_{21}^2 \end{bmatrix} + (\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1} \begin{bmatrix} h_{11,t+1} - \sigma_{11}^2 \\ h_{21,t+1} - \sigma_{21}^2 \end{bmatrix} \right] \right. \\
\quad \left. + ((\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j-1}\mathbf{A}_1)^2 \left[\begin{bmatrix} \sigma_{12}^2 \\ \sigma_{22}^2 \end{bmatrix} + (\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)^{j-1} \begin{bmatrix} \alpha_{12} - \sigma_{12}^2 \\ \alpha_{22} - \sigma_{22}^2 \end{bmatrix} + (\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)^{j-1}\mathbf{B}_2 \begin{bmatrix} h_{11,t+1} \\ h_{21,t+1} \end{bmatrix} \right]\right] & \text{if} \quad \Psi_t = \psi_{2,t}
\end{cases}
\tag{13}
$$

$$
\begin{bmatrix} \mathrm{Var}(\widetilde{r}_{12,t+m} \mid \Psi_t) \\ \mathrm{Var}(\widetilde{r}_{22,t+m} \mid \Psi_t) \end{bmatrix} = \begin{cases}
\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \left[((\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-j}\mathbf{A}_2)^2 \left[\begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 \\ \sigma_{21}^2 \end{bmatrix} + (\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1} \begin{bmatrix} \alpha_{11} - \sigma_{11}^2 \\ \alpha_{21} - \sigma_{21}^2 \end{bmatrix} + (\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1}\mathbf{B}_1 \begin{bmatrix} h_{12,t} - \sigma_{12}^2 \\ h_{22,t} - \sigma_{12}^2 \end{bmatrix} \right]\right] \\
\quad + \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \left[(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{2(m-j)} \left[\begin{bmatrix} \sigma_{12}^2 \\ \sigma_{22}^2 \end{bmatrix} + (\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)^{j} \begin{bmatrix} h_{12,t} - \sigma_{12}^2 \\ h_{22,t} - \sigma_{22}^2 \end{bmatrix} \right]\right] & \text{if} \quad \Psi_t = \psi_{1,t} \\
\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \left[((\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-j}\mathbf{A}_2)^2 \left[\begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 \\ \sigma_{21}^2 \end{bmatrix} + (\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1} \begin{bmatrix} h_{11,t+1} - \sigma_{11}^2 \\ h_{21,t+1} - \sigma_{21}^2 \end{bmatrix} \right] \right. \\
\quad \left. + (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{2(m-j)} \left[\begin{bmatrix} \sigma_{12}^2 \\ \sigma_{22}^2 \end{bmatrix} + (\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)^{j-1} \begin{bmatrix} \alpha_{12} - \sigma_{12}^2 \\ \alpha_{22} - \sigma_{22}^2 \end{bmatrix} + (\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)^{j-1}\mathbf{B}_2 \begin{bmatrix} h_{11,t+1} \\ h_{21,t+1} \end{bmatrix} \right]\right] & \text{if} \quad \Psi_t = \psi_{2,t}
\end{cases}
$$

$$
\begin{bmatrix} \mathrm{Var}(\widetilde{r}_{1,t+m} \mid \Psi_t) \\ \mathrm{Var}(\widetilde{r}_{2,t+m} \mid \Psi_t) \end{bmatrix} = \begin{cases}
\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \left[[(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{2(m-j)} + (\mathbf{A}_2(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j})^2] \left[\begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 \\ \sigma_{21}^2 \end{bmatrix} + (\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1} \begin{bmatrix} \alpha_{11} - \sigma_{11}^2 \\ \alpha_{21} - \sigma_{21}^2 \end{bmatrix} + (\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1}\mathbf{B}_1 \begin{bmatrix} h_{12,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix} \right]\right] \\
\quad + \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \left[[((\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j-1}\mathbf{A}_1)^2 + (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{2(m-j)}] \left[\begin{bmatrix} \sigma_{12}^2 \\ \sigma_{22}^2 \end{bmatrix} + (\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)^{j} \begin{bmatrix} h_{12,t} - \sigma_{12}^2 \\ h_{22,t} - \sigma_{22}^2 \end{bmatrix} \right]\right] & \text{if} \quad \Psi_t = \psi_{1,t} \\
\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \left[[(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{2(m-j)} + (\mathbf{A}_2(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j})^2] \left[\begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 \\ \sigma_{21}^2 \end{bmatrix} + (\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1} \begin{bmatrix} h_{11,t+1} - \sigma_{11}^2 \\ h_{21,t+1} - \sigma_{11}^2 \end{bmatrix} \right] \right. \\
\quad \left. + [((\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j-1}\mathbf{A}_1)^2 + (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{2(m-j)}] \left[\begin{bmatrix} \sigma_{12}^2 \\ \sigma_{22}^2 \end{bmatrix} + (\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)^{j-1} \begin{bmatrix} \alpha_{12} - \sigma_{12}^2 \\ \alpha_{22} - \sigma_{22}^2 \end{bmatrix} + (\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)^{j-1}\mathbf{B}_2 \begin{bmatrix} h_{11,t+1} \\ h_{21,t+1} \end{bmatrix} \right]\right] & \text{if} \quad \Psi_t = \psi_{2,t}
\end{cases}
\tag{14}
$$

4.3 n 期間収益率の条件付分散の導出

現時点の情報集合 Ψ_t $(=\psi_{1,t}$ あるいは $\psi_{2,t})$ の下での，第 i 資産の第 j フ

ァクターの将来 n 期間の条件付収益率 $\mathrm{Var}(\widetilde{R}_{ij,n}\,|\,\Psi_t)$ $\left(\equiv \mathrm{Var}\left(\sum_{m=1}^{n}\widetilde{r}_{ij,t+m}\,|\,\Psi_t\right),\right.$ $\left. i,j=1,2,\ m\geq 1\right)$ はそれぞれ(15)式となる。

$$
\begin{bmatrix}\mathrm{Var}(\widetilde{R}_{11,n}\,|\,\Psi_t)\\ \mathrm{Var}(\widetilde{R}_{21,n}\,|\,\Psi_t)\end{bmatrix}=
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\Bigg[\sum_{j=1}^{m}\Bigg[(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{2(m-j)}\Bigg[\begin{bmatrix}\sigma_{11}^2\\ \sigma_{21}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1}\begin{bmatrix}\alpha_{11}-\sigma_{11}^2\\ \alpha_{21}-\sigma_{21}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1}\mathbf{B}_1\begin{bmatrix}h_{12,t}\\ h_{22,t}\end{bmatrix}\Bigg]\Bigg]\Bigg] \\
\displaystyle\quad+\sum_{j=0}^{m}\Bigg[((\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j-1}\mathbf{A}_2)^2\Bigg[\begin{bmatrix}\sigma_{12}^2\\ \sigma_{22}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)^{j}\begin{bmatrix}h_{12,t}-\sigma_{12}^2\\ h_{22,t}-\sigma_{22}^2\end{bmatrix}\Bigg]\Bigg]\Bigg]\Bigg] \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{if}\quad \Psi_t=\psi_{1,t} \\
\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Bigg[(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{2(m-j)}\Bigg[\begin{bmatrix}\sigma_{11}^2\\ \sigma_{21}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1}\begin{bmatrix}h_{11,t+1}-\sigma_{11}^2\\ h_{21,t+1}-\sigma_{21}^2\end{bmatrix}\Bigg]\Bigg] \\
\displaystyle\quad+((\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j-1}\mathbf{A}_2)^2\Bigg[\begin{bmatrix}\sigma_{12}^2\\ \sigma_{22}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)^{j-1}\begin{bmatrix}\alpha_{12}-\sigma_{12}^2\\ \alpha_{22}-\sigma_{22}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)^{j-1}\mathbf{B}_2\begin{bmatrix}h_{11,t+1}\\ h_{21,t+1}\end{bmatrix}\Bigg]\Bigg]\Bigg] \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{if}\quad \Psi_t=\psi_{2,t}
\end{cases}
$$

$$
\begin{bmatrix}\mathrm{Var}(\widetilde{R}_{12,n}\,|\,\Psi_t)\\ \mathrm{Var}(\widetilde{R}_{22,n}\,|\,\Psi_t)\end{bmatrix}=
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\Bigg[\sum_{j=1}^{m}\Bigg[((\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-j}\mathbf{A}_1)^2\Bigg[\begin{bmatrix}\sigma_{11}^2\\ \sigma_{21}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1}\begin{bmatrix}\alpha_{11}-\sigma_{11}^2\\ \alpha_{21}-\sigma_{21}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1}\mathbf{B}_1\begin{bmatrix}h_{12,t}\\ h_{22,t}\end{bmatrix}\Bigg]\Bigg]\Bigg] \\
\displaystyle\quad+\sum_{j=0}^{m}\Bigg[(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{2(m-j)}\Bigg[\begin{bmatrix}\sigma_{12}^2\\ \sigma_{22}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)^{j}\begin{bmatrix}h_{12,t}-\sigma_{12}^2\\ h_{22,t}-\sigma_{22}^2\end{bmatrix}\Bigg]\Bigg]\Bigg]\Bigg] \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{if}\quad \Psi_t=\psi_{1,t} \\
\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Bigg[((\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-j}\mathbf{A}_1)^2\Bigg[\begin{bmatrix}\sigma_{11}^2\\ \sigma_{21}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1}\begin{bmatrix}h_{11,t+1}-\sigma_{11}^2\\ h_{21,t+1}-\sigma_{21}^2\end{bmatrix}\Bigg]\Bigg] \\
\displaystyle\quad+(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{2(m-j)}\Bigg[\begin{bmatrix}\sigma_{12}^2\\ \sigma_{22}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)^{j-1}\begin{bmatrix}\alpha_{12}-\sigma_{12}^2\\ \alpha_{22}-\sigma_{22}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)^{j-1}\mathbf{B}_2\begin{bmatrix}h_{11,t+1}\\ h_{21,t+1}\end{bmatrix}\Bigg]\Bigg]\Bigg] \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{if}\quad \Psi_t=\psi_{2,t}
\end{cases}
\tag{15}
$$

またもう一つの視点から，現時点の情報集合の下での，第 i 資産の将来 n 期間の収益率の条件付分散を求める。この分散は(14)式で求めた時点 $t+m$ の第 i 資産の収益率の条件付分散を $m=1$ から $m=n$ について合計する $\sum_{m=1}^{n}(\mathrm{Var}(\widetilde{r}_{i1,t+m}\,|\,\Psi_t)+\mathrm{Var}(\widetilde{r}_{i2,t+m}\,|\,\Psi_t))$ か，あるいは(15)式を j について加えた収益率 $\sum_{j=1}^{2}\mathrm{Var}(\widetilde{R}_{ij,n}\,|\,\Psi_t)$ として導出できる。(16)式は現時点の情報集合 Ψ_t $(=\psi_{1,t}$ あるいは $\psi_{2,t})$ の下での，将来 n 期間の第 i 資産の収益率の条件付分散 $\mathrm{Var}(\widetilde{R}_{in}\,|\,\Psi_t)$ $\left(\equiv \sum_{m=1}^{n}(\mathrm{Var}(\widetilde{r}_{i1,t+m}\,|\,\Psi_t)+\mathrm{Var}(\widetilde{r}_{i2,t+m}\,|\,\Psi_t))=\sum_{j=1}^{2}\mathrm{Var}(\widetilde{R}_{ij,n}\,|\,\Psi_t),\right.$ $\left. i,j=1,2,\ m\geq 1\right)$ である。

$$\begin{bmatrix}\mathrm{Var}(\widetilde{R}_{1n}\mid\Psi_t)\\ \mathrm{Var}(\widetilde{R}_{2n}\mid\Psi_t)\end{bmatrix}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\Bigg[\sum_{j=1}^{m}\Bigg[[(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{2(m-j)}+(\mathbf{A}_2(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j})^2]\Bigg[\begin{bmatrix}\sigma_{11}^2\\ \sigma_{21}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1}\begin{bmatrix}\alpha_{11}-\sigma_{11}^2\\ \alpha_{21}-\sigma_{21}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1}\mathbf{B}_1\begin{bmatrix}h_{12,t}\\ h_{22,t}\end{bmatrix}\Bigg]\Bigg] \\ \displaystyle\quad+\sum_{j=0}^{m}\Bigg[[(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{2(m-j)}+((\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j-1}\mathbf{A}_1)^2]\Bigg[\begin{bmatrix}\sigma_{12}^2\\ \sigma_{22}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)^{j}\begin{bmatrix}h_{12,t}-\sigma_{12}^2\\ h_{22,t}-\sigma_{22}^2\end{bmatrix}\Bigg]\Bigg]\Bigg] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{if}\quad \Psi_t=\psi_{1,t} \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Bigg[[(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{2(m-j)}+(\mathbf{A}_2(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j})^2]\Bigg[\begin{bmatrix}\sigma_{11}^2\\ \sigma_{21}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1}\begin{bmatrix}h_{11,t+1}-\sigma_{11}^2\\ h_{21,t+1}-\sigma_{21}^2\end{bmatrix}\Bigg] \\ \displaystyle\quad+[(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{2(m-j)}+((\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j-1}\mathbf{A}_1)^2]\Bigg[\begin{bmatrix}\sigma_{12}^2\\ \sigma_{22}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)^{j-1}\begin{bmatrix}\alpha_{12}-\sigma_{12}^2\\ \alpha_{22}-\sigma_{22}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)^{j-1}\mathbf{B}_2\begin{bmatrix}h_{11,t+1}\\ h_{21,t+1}\end{bmatrix}\Bigg]\Bigg] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{if}\quad \Psi_t=\psi_{2,t}\end{cases} \tag{16}$$

Appendices

Appendix A

無条件期待収益率を定義しておく。ここで，無条件期待収益率とは現時点の情報の下での無限に遠い将来の任意の時点の収益率の期待値を意味する。第 i 資産の第 1 ファクターの無条件期待収益率 μ_{i1} $(i=1,2)$ を求めるために，まず時点 t の情報集合 Ψ_t $(=\psi_{1,t}$ あるいは $\psi_{2,t})$ の下での $t+m$ 時点 $(m\geq 1)$ の収益率を(2)式から求め，両辺の条件付期待値をとり，最後に $m\to\infty$ にすると，次式のようになる。すなわち，

$$\mu_{i1}\equiv\lim_{m\to\infty}E[\widetilde{r}_{1,t+m}\mid\Psi_t]=c_{i1}+\sum_{i=1}^{2}a_{ij1}\Big[\lim_{m\to\infty}E[\widetilde{r}_{2,t+m-1}\mid\Psi_t]\Big]=c_{i1}+\sum_{i=1}^{2}a_{ij1}\mu_{i2}\quad \text{for}\quad i=1,2. \tag{a1}$$

同様に，第 i 資産の第 2 ファクターの無条件期待収益率は(2)式から次式のようになる。すなわち，

$$\mu_{i2}\equiv\lim_{m\to\infty}E[\widetilde{r}_{2,t+m}\mid\Psi_t]=c_{i2}+\sum_{i=1}^{2}a_{ij2}\Big[\lim_{m\to\infty}E[\widetilde{r}_{1,t+m}\mid\Psi_t]\Big]=c_{i2}+\sum_{i=1}^{2}a_{ij2}\mu_{i1}\quad \text{for}\quad i=1,2. \tag{a2}$$

(a1)式と(a2)式を行列表示で書き直すと，次式となる。

$$\begin{bmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \end{bmatrix} + \mathbf{A}_i \begin{bmatrix} c_{1,3-i} \\ c_{2,3-i} \end{bmatrix} = (\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_i \mathbf{A}_{3-i}) \begin{bmatrix} \mu_{1i} \\ \mu_{2i} \end{bmatrix} \quad \text{for} \quad i = 1, 2. \tag{a3}$$

ここで

$$\mathbf{A}_i \equiv \begin{bmatrix} a_{11i} & a_{12i} \\ a_{21i} & a_{22i} \end{bmatrix} \quad \text{for} \quad i = 1, 2. \tag{a4}$$

(a3)式から第 i 資産の第 j ファクターの無条件期待収益率 μ_{ij} $(i, j = 1, 2)$ が次式のように得られる。

$$\begin{bmatrix} \mu_{1i} \\ \mu_{2i} \end{bmatrix} = (\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_i \mathbf{A}_{3-i})^{-1} \left[\begin{bmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \end{bmatrix} + \mathbf{A}_i \begin{bmatrix} c_{1,3-i} \\ c_{2,3-i} \end{bmatrix} \right] \quad \text{for} \quad i = 1, 2. \tag{a5}$$

ここで，上付き添え字 -1 は逆行列を表す。

次に，時点 t の情報集合 $\psi_{1,t}$ での $t+m$ 時点の第 1 ファクターの収益率の条件付期待値を求める。そこでまず，時点 t の情報集合 $\psi_{1,t}$ の下での $t+m$ 時点の第 1 ファクターの収益率のすべての誤差項を W_{i1m} $(\equiv E[\tilde{r}_{i1,t+m} \mid \psi_{1,t}] - \mu_{i1}$, $i = 1, 2,\ m \geq 1)$ と定義する。次に，(2) 式から求められる $E[\tilde{r}_{i1,t+m} \mid \psi_{1,t}]$ $(i = 1, 2)$ に再帰的代入を行うと，次式のようになる。

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} W_{11m} \\ W_{21m} \end{bmatrix} &\equiv \begin{bmatrix} E[\tilde{r}_{11,t+m} \mid \psi_{1,t}] - \mu_{11} \\ E[\tilde{r}_{21,t+m} \mid \psi_{1,t}] - \mu_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} + \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} E[\tilde{r}_{12,t+m-1} \mid \psi_{1,t}] \\ E[\tilde{r}_{22,t+m-1} \mid \psi_{1,t}] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} + \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{21} \end{bmatrix} \right] + \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} E[\tilde{r}_{11,t+m-1} \mid \psi_{1,t}] \\ E[\tilde{r}_{21,t+m-1} \mid \psi_{1,t}] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} E[\tilde{r}_{11,t+m-1} \mid \psi_{1,t}] - \mu_{11} \\ E[\tilde{r}_{21,t+m-1} \mid \psi_{1,t}] - \mu_{21} \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} W_{11,m-1} \\ W_{21,m-1} \end{bmatrix} = (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2)^m \begin{bmatrix} W_{11,0} \\ W_{21,0} \end{bmatrix} = (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2)^m \begin{bmatrix} r_{11,t} - \mu_{11} \\ r_{21,t} - \mu_{21} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{a6}$$

同様に，時点 t の情報集合 $\psi_{2,t}$ での $t+m$ 時点の第 1 ファクターの収益率のすべての誤差項を $\hat{W}_{i1m}$ $(\equiv E[\tilde{r}_{i1,t+m} \mid \psi_{2,t}] - \mu_{i1}$, $i = 1, 2,\ m \geq 1)$ と定義して，(2) 式から求められる $E[\tilde{r}_{i1,t+m} \mid \psi_{2,t}]$ $(i = 1, 2)$ に再帰的代入を行うと，次

式になる。

$$\begin{bmatrix}\hat{W}_{11m}\\ \hat{W}_{21m}\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}E[\widetilde{r}_{1,t+m}\,|\,\psi_{2,t}]-\mu_{11}\\ E[\widetilde{r}_{21,t+m}\,|\,\psi_{2,t}]-\mu_{21}\end{bmatrix}=(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-1}\begin{bmatrix}E[\widetilde{r}_{1,t+1}\,|\,\psi_{2,t}]-\mu_{11}\\ E[\widetilde{r}_{21,t+1}\,|\,\psi_{2,t}]-\mu_{21}\end{bmatrix}$$

$$=(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-1}\left[\begin{bmatrix}c_{11}\\ c_{21}\end{bmatrix}+\mathbf{A}_1\begin{bmatrix}r_{12,t}\\ r_{22,t}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mu_{11}\\ \mu_{21}\end{bmatrix}\right] \tag{a7}$$

ここで，$(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^0\equiv\mathbf{I}_2$ とし，$\mathbf{I}_2$ は 2×2 の単位行列を表す。(a6)式と(a7)式から，時点 t の情報集合 Ψ_t ($=\psi_{1,t}$ あるいは $\psi_{2,t}$) の下での $t+m$ 時点の第1ファクターの収益率の条件付期待値 $E[\widetilde{r}_{i1,t+m}\,|\,\psi_{j,t}]$ ($i, j=1,2,\ m\geq1$) を求めると，次式となる。

$$\begin{bmatrix}E[\widetilde{r}_{11,t+m}\,|\,\Psi_t]\\ E[\widetilde{r}_{21,t+m}\,|\,\Psi_t]\end{bmatrix}=\begin{cases}\begin{bmatrix}\mu_{11}\\ \mu_{21}\end{bmatrix}+(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^m\begin{bmatrix}r_{11,t}-\mu_{11}\\ r_{21,t}-\mu_{21}\end{bmatrix} & \text{if}\quad \Psi_t=\psi_{1,t}\\ \begin{bmatrix}\mu_{11}\\ \mu_{21}\end{bmatrix}+(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-1}\begin{bmatrix}c_{11}-\mu_{11}\\ c_{21}-\mu_{21}\end{bmatrix}+(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-1}\mathbf{A}_1\begin{bmatrix}r_{12,t}\\ r_{22,t}\end{bmatrix} & \text{if}\quad \Psi_t=\psi_{2,t}\end{cases} \tag{a8}$$

(a8)式はまた次式で表すこともできる。

$$\begin{bmatrix}E[\widetilde{r}_{11,t+m}\,|\,\Psi_t]\\ E[\widetilde{r}_{21,t+m}\,|\,\Psi_t]\end{bmatrix}=\begin{cases}=\begin{bmatrix}\mu_{11}\\ \mu_{21}\end{bmatrix}+\dfrac{1}{2^m\sqrt{\det(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)}}\begin{bmatrix}\dfrac{A_1{}^mC_1+B_1{}^mD_1}{2} & d_{12}^{(1)}(B_1{}^m-A_1{}^m)\\ d_{21}^{(1)}(B_1{}^m-A_1{}^m) & \dfrac{A_1{}^mD_1+B_1{}^mC_1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_{11,t}-\mu_{11}\\ r_{21,t}-\mu_{21}\end{bmatrix}\\ \hfill\text{if}\quad \Psi_t=\psi_{1,t}\\ =\begin{bmatrix}\mu_{11}\\ \mu_{21}\end{bmatrix}+(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-1}\begin{bmatrix}c_{11}-\mu_{11}\\ c_{21}-\mu_{21}\end{bmatrix}\\ \quad+\dfrac{\mathbf{A}_1}{2^{m-1}\sqrt{\det(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)}}\begin{bmatrix}\dfrac{A_2{}^{m-1}C_2+B_2{}^{m-1}D_2}{2} & d_{12}^{(2)}(B_2{}^{m-1}-A_2{}^{m-1})\\ d_{21}^{(2)}(B_2{}^{m-1}-A_2{}^{m-1}) & \dfrac{A_2{}^{m-1}D_2+B_2{}^{m-1}C_2}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_{12,t}\\ r_{22,t}\end{bmatrix}\\ \hfill\text{if}\quad \Psi_t=\psi_{2,t}\end{cases}$$

ここで，$\det(\cdot)$は行列式を表し，

$$A_i \equiv d_{11}^{(i)} + d_{22}^{(i)} - \sqrt{\det(\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{3-i})},\quad B_i \equiv d_{11}^{(i)} + d_{22}^{(i)} + \sqrt{\det(\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{3-i})},$$

$$C_i \equiv -d_{11}^{(i)} + d_{22}^{(i)} + \sqrt{\det(\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{3-i})},\quad D_i \equiv d_{11}^{(i)} - d_{22}^{(i)} + \sqrt{\det(\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{3-i})}. \tag{a9}$$

$$\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{3-i} \equiv \begin{bmatrix} d_{11}^{(i)} & d_{12}^{(i)} \\ d_{21}^{(i)} & d_{22}^{(i)} \end{bmatrix} \qquad \text{for} \quad i = 1, 2.$$

である。同様の手続きを行うと，時点tの情報集合Ψ_t（$=\psi_{1,t}$あるいは$\psi_{2,t}$）の下での$t+m$時点の第２ファクターの収益率の条件付期待値$E[\tilde{r}_{i2,t+m}\,|\,\psi_{j,t}]$（$i, j=1,2,\ m\geq 1$）を求めると，次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} E[\tilde{r}_{12,t+m}\,|\,\Psi_t] \\ E[\tilde{r}_{22,t+m}\,|\,\Psi_t] \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{22} \end{bmatrix} + (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^m \begin{bmatrix} c_{12}-\mu_{12} \\ c_{22}-\mu_{22} \end{bmatrix} + (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^m \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} r_{11,t} \\ r_{21,t} \end{bmatrix} & \text{if} \quad \Psi_t = \psi_{1,t} \\ \begin{bmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{22} \end{bmatrix} + (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^m \begin{bmatrix} r_{12,t}-\mu_{12} \\ r_{22,t}-\mu_{22} \end{bmatrix} & \text{if} \quad \Psi_t = \psi_{2,t} \end{cases} \tag{a10}$$

(a10)式はまた次式で表すこともできる。

$$\begin{bmatrix} E[\tilde{r}_{12,t+m}\,|\,\Psi_t] \\ E[\tilde{r}_{22,t+m}\,|\,\Psi_t] \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{22} \end{bmatrix} + (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^m \begin{bmatrix} c_{12}-\mu_{12} \\ c_{22}-\mu_{22} \end{bmatrix} \\ \quad + \dfrac{\mathbf{A}_2}{2^m\sqrt{\det(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)}} \begin{bmatrix} \dfrac{A_1{}^m C_1 + B_1{}^m D_1}{2} & d_{12}^{(1)}(B_1{}^m - A_1{}^m) \\ d_{21}^{(1)}(B_1{}^m - A_1{}^m) & \dfrac{A_1{}^m D_1 + B_1{}^m C_1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11,t} \\ r_{21,t} \end{bmatrix} \\ \hfill \text{if} \quad \Psi_t = \psi_{1,t} \\ \begin{bmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{22} \end{bmatrix} \\ \quad + \dfrac{1}{2^m\sqrt{\det(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)}} \begin{bmatrix} \dfrac{A_2{}^m C_2 + B_2{}^m D_2}{2} & d_{12}^{(2)}(B_2{}^m - A_2{}^m) \\ d_{21}^{(2)}(B_2{}^m - A_2{}^m) & \dfrac{A_2{}^m D_2 + B_2{}^m C_2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{12,t}-\mu_{12} \\ r_{22,t}-\mu_{22} \end{bmatrix} \\ \hfill \text{if} \quad \Psi_t = \psi_{2,t} \end{cases}$$

Q.E.D.

Appendix B

時点 t の情報集合 $\psi_{1,t}$ あるいは $\psi_{2,t}$ の下での $t+m$ 時点の第 i 資産の第 j ファクターの収益率 $\widetilde{r}_{ij,\,t+m}\,|\,\Psi_t$ ($i, j=1, 2,\ m \geq 1,\quad \Psi_t=\psi_{1,t}$ あるいは $\psi_{2,t}$) を次のように定義する。

$$\widetilde{r}_{i1,\,t+m} \equiv E\left[\widetilde{r}_{i1,\,t+m}\,|\,\Psi_t\right]+\sum_{s=1}^{l}\sum_{j=1}^{2}B_{ijsm}^{(1)}\widetilde{\varepsilon}_{j1,\,t+s}+\sum_{s=\nu}^{m-1}\sum_{j=1}^{2}B_{ijsm}^{(2)}\widetilde{\varepsilon}_{j2,\,t+s} \qquad \text{for} \quad i=1,2. \tag{b1}$$

$$\widetilde{r}_{i2,\,t+m} \equiv E\left[\widetilde{r}_{i2,\,t+m}\,|\,\Psi_t\right]+\sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{2}D_{ijsm}^{(1)}\widetilde{\varepsilon}_{j1,\,t+s}+\sum_{s=\nu}^{l}\sum_{j=1}^{2}D_{ijsm}^{(2)}\widetilde{\varepsilon}_{j2,\,t+s} \qquad \text{for} \quad i=1,2. \tag{b2}$$

ここで,

$$l=\begin{cases} m & \text{if} \quad i=j, \\ m-1 & \text{if} \quad i\neq j. \end{cases} \qquad \nu=\begin{cases} 0 & \text{if} \quad \Psi_t=\psi_{1,t} \\ 1 & \text{if} \quad \Psi_t=\psi_{2,t} \end{cases}$$

(2)式から $t+m$ 時点の第 i 資産の第1ファクターの収益率 $\widetilde{r}_{i1,\,t+m}\,|\,\Psi_t$ ($i=1,2$) に(b1)式を代入すると，次式となる。

$$\begin{aligned} \widetilde{r}_{i1,\,t+m} &= c_{i1}+\sum_{j=1}^{2}a_{ij}\widetilde{r}_{j2,\,t+m-1}+\widetilde{\varepsilon}_{i1,\,t+m} \\ &= c_{i1}+\sum_{j=1}^{2}a_{ij}\left(E\left[\widetilde{r}_{j2,\,t+m-1}\,|\,\Psi_t\right]+\sum_{s=1}^{m-1}\sum_{q=1}^{2}D_{iqs,\,m-1}^{(1)}\widetilde{\varepsilon}_{q1,\,t+s}+\sum_{s=\nu}^{l-1}\sum_{q=1}^{2}D_{iqs,\,m-1}^{(2)}\widetilde{\varepsilon}_{q2,\,t+s}\right)+\widetilde{\varepsilon}_{i1,\,t+m}. \end{aligned} \tag{b3}$$

また(2)式から $t+m$ 時点の第2ファクターの収益率 $\widetilde{r}_{i2,\,t+m}\,|\,\Psi_t$ ($i=1,2$) に(b2)式を代入すると，次式となる。

$$\begin{aligned} \widetilde{r}_{i2,\,t+m} &= c_{i2}+\sum_{j=1}^{2}b_{ij}\widetilde{r}_{j1,\,t+m}+\widetilde{\varepsilon}_{i2,\,t+m} \\ &= c_{i2}+\sum_{j=1}^{2}b_{ij}\left(E\left[\widetilde{r}_{j1,\,t+m}\,|\,\Psi_t\right]+\sum_{s=1}^{l}\sum_{q=1}^{2}B_{iqsm}^{(1)}\widetilde{\varepsilon}_{q1,\,t+s}+\sum_{s=\nu}^{m-1}\sum_{q=1}^{2}B_{iqsm}^{(2)}\widetilde{\varepsilon}_{j2,\,t+s}\right)+\widetilde{\varepsilon}_{i2,\,t+m}. \end{aligned} \tag{b4}$$

ここで,

$$\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{m-1}B_{ijsm}^{(2)}=\sum_{s=1}^{m-1}D_{ijs,\,m-1}^{(2)}=0 \quad \text{for} \quad j=1,2 \quad \text{if} \quad m=1. \\ &B_{iimm}^{(1)}=D_{iimm}^{(2)}=1 \quad \text{for} \quad j=1,2. \\ &D_{ijmm}^{(1)}=b_{ij} \quad \text{for} \quad i,j=1,2. \end{aligned} \tag{b5}$$

であり，(b5)式は初期条件である。(b1)式の各係数は(b3)式の各係数と同じでなければならないことから，以下の基本解を得る。

$$\begin{bmatrix} B_{11sm}^{(k)} & B_{12sm}^{(k)} \\ B_{21sm}^{(k)} & B_{22sm}^{(k)} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} D_{11s,m-1}^{(k)} & D_{12s,m-1}^{(k)} \\ D_{21s,m-1}^{(k)} & D_{22s,m-1}^{(k)} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} B_{11s,m-1}^{(k)} & B_{12s,m-1}^{(k)} \\ B_{21s,m-1}^{(k)} & B_{22s,m-1}^{(k)} \end{bmatrix} = (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^m \begin{bmatrix} \lambda_{11s}^{(k)} & \lambda_{12s}^{(k)} \\ \lambda_{21s}^{(k)} & \lambda_{22s}^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$\text{for} \quad k=1,2. \tag{b6}$$

ここで，$\lambda_{ij}^{(k)}$ $(i, j=1,2, \ \ k=1,2)$ は任意の定数である。次に，$k=2$ かつ $s=m-1$ のとき，(b6)式と初期条件(b5)式から次の等式が得られる。

$$\begin{bmatrix} B_{11m,m-1}^{(2)} & B_{12m,m-1}^{(2)} \\ B_{21m,m-1}^{(2)} & B_{22m,m-1}^{(2)} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 = (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^m \begin{bmatrix} \lambda_{11m-1}^{(2)} & \lambda_{12m-1}^{(2)} \\ \lambda_{21m-1}^{(2)} & \lambda_{22m-1}^{(2)} \end{bmatrix} \tag{b7}$$

$k=2$ のときの(b6)式の特殊解は次式となる。

$$\begin{bmatrix} B_{11sm}^{(2)} & B_{12sm}^{(2)} \\ B_{21sm}^{(2)} & B_{22sm}^{(2)} \end{bmatrix} = (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-s-1}\mathbf{A}_1\,. \tag{b8}$$

同様に，(b2)式の各係数は(b4)式の各係数と同じでなければならないことから，以下の基本解を得る。

$$\begin{bmatrix} D_{11sm}^{(k)} & D_{12sm}^{(k)} \\ D_{21sm}^{(k)} & D_{22sm}^{(k)} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} B_{11sm}^{(k)} & B_{12sm}^{(k)} \\ B_{21sm}^{(k)} & B_{22sm}^{(k)} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} D_{11s,m-1}^{(k)} & D_{12s,m-1}^{(k)} \\ D_{21s,m-1}^{(k)} & D_{22s,m-1}^{(k)} \end{bmatrix} = (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^m \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_{11s}^{(k)} & \hat{\lambda}_{12s}^{(k)} \\ \hat{\lambda}_{21s}^{(k)} & \hat{\lambda}_{22s}^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$\text{for} \quad k=1,2. \tag{b9}$$

ここで，$\hat{\lambda}_{ij}^{(k)}$ $(i, j=1,2, \ \ k=1,2)$ は任意の定数である。次に，$k=2$ のとき，(b9)式と初期条件(b5)式から，次の特殊解が得られる。

$$\begin{bmatrix} D_{11sm}^{(2)} & D_{12sm}^{(2)} \\ D_{21sm}^{(2)} & D_{22sm}^{(2)} \end{bmatrix} = (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-s}. \tag{b10}$$

$k=1$ かつ $s=m$ のとき，(b9)式は初期条件(b5)式から次の等式が得られる。

$$\begin{bmatrix} D_{11mm}^{(1)} & D_{12mm}^{(1)} \\ D_{21mm}^{(1)} & D_{22mm}^{(1)} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2 = (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^m \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_{11m-1}^{(1)} & \hat{\lambda}_{12m-1}^{(1)} \\ \hat{\lambda}_{21m-1}^{(1)} & \hat{\lambda}_{22m-1}^{(1)} \end{bmatrix} \tag{b11}$$

$k=1$ のとき，(b11)式と初期条件(b5)式から，次の特殊解が得られる。

$$\begin{bmatrix} D_{11sm}^{(1)} & D_{12sm}^{(1)} \\ D_{21sm}^{(1)} & D_{22sm}^{(1)} \end{bmatrix} = (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-s}\mathbf{A}_2. \tag{b12}$$

また $k=1$ のとき，(b6)式の特殊解は(b12)式から導かれる。

$$\begin{bmatrix} B_{11sm}^{(1)} & B_{12sm}^{(1)} \\ B_{21sm}^{(1)} & B_{22sm}^{(1)} \end{bmatrix} = (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-s}. \tag{b13}$$

次に，(b1)式に(b8)式と(b13)式を，(b2)式に(b10)式と(b12)式を，代入すると，次式のような時点 t の情報集合 Ψ_t $(=\psi_{1,t}$ あるいは $\psi_{2,t})$ の下での $t+m$ 時点の第 i 資産の第 j ファクターの誤差項 $\widetilde{r}_{ij,t+m}\,|\,\Psi_t - E[\widetilde{r}_{ij,t+m}\,|\,\Psi_t]$ $(i,j=1,2)$ が得られる。

$$\begin{bmatrix} \widetilde{r}_{11,t+m}\,|\,\Psi_t - E[\widetilde{r}_{11,t+m}\,|\,\Psi_t] \\ \widetilde{r}_{21,t+m}\,|\,\Psi_t - E[\widetilde{r}_{21,t+m}\,|\,\Psi_t] \end{bmatrix} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{m}(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j}\begin{bmatrix} \widetilde{\varepsilon}_{11,t+j}\,|\,\psi_{1,t} \\ \widetilde{\varepsilon}_{21,t+j}\,|\,\psi_{1,t} \end{bmatrix} \\ \qquad + \displaystyle\sum_{j=0}^{m-1}(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j-1}\mathbf{A}_1\begin{bmatrix} \widetilde{\varepsilon}_{12,t+j}\,|\,\psi_{1,t} \\ \widetilde{\varepsilon}_{22,t+j}\,|\,\psi_{1,t} \end{bmatrix} & \text{if} \quad \Psi_t = \psi_{1,t} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m}(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j}\begin{bmatrix} \widetilde{\varepsilon}_{11,t+j}\,|\,\psi_{2,t} \\ \widetilde{\varepsilon}_{21,t+j}\,|\,\psi_{2,t} \end{bmatrix} \\ \qquad + \displaystyle\sum_{j=1}^{m-1}(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{m-j-1}\mathbf{A}_1\begin{bmatrix} \widetilde{\varepsilon}_{12,t+j}\,|\,\psi_{2,t} \\ \widetilde{\varepsilon}_{22,t+j}\,|\,\psi_{2,t} \end{bmatrix} & \text{if} \quad \Psi_t = \psi_{2,t} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \widetilde{r}_{12,t+m}\,|\,\Psi_t - E[\widetilde{r}_{12,t+m}\,|\,\Psi_t] \\ \widetilde{r}_{22,t+m}\,|\,\Psi_t - E[\widetilde{r}_{22,t+m}\,|\,\Psi_t] \end{bmatrix} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{m}(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-j}\mathbf{A}_2\begin{bmatrix} \widetilde{\varepsilon}_{11,t+j}\,|\,\psi_{1,t} \\ \widetilde{\varepsilon}_{21,t+j}\,|\,\psi_{1,t} \end{bmatrix} \\ \qquad + \displaystyle\sum_{j=0}^{m}(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-j}\begin{bmatrix} \widetilde{\varepsilon}_{12,t+j}\,|\,\psi_{1,t} \\ \widetilde{\varepsilon}_{22,t+j}\,|\,\psi_{1,t} \end{bmatrix} & \text{if} \quad \Psi_t = \psi_{1,t} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m}(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-j}\mathbf{A}_2\begin{bmatrix} \widetilde{\varepsilon}_{11,t+j}\,|\,\psi_{2,t} \\ \widetilde{\varepsilon}_{21,t+j}\,|\,\psi_{2,t} \end{bmatrix} \\ \qquad + \displaystyle\sum_{j=1}^{m}(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{m-j}\begin{bmatrix} \widetilde{\varepsilon}_{12,t+j}\,|\,\psi_{2,t} \\ \widetilde{\varepsilon}_{22,t+j}\,|\,\psi_{2,t} \end{bmatrix} & \text{if} \quad \Psi_t = \psi_{2,t} \end{cases} \tag{b14}$$

最後に，時点 t の情報集合 Ψ_t $(=\psi_{1,t}$ あるいは $\psi_{2,t})$ の下での $t+m$ 時点 $(m \geq 1)$ の第 i 資産の収益率の条件付期待値 $E[\widetilde{r}_{ij,t+m}\,|\,\Psi_t]$ $(i,j=1,2)$ を表す

(a8)式（あるいは(a9)式）と(a10)式（あるいは(a11)式）を，(b14)式の両辺からそれぞれを引くと時点 t の情報集合 Ψ_t $(=\psi_{1,t}$ あるいは $\psi_{2,t})$ の下での $t+m$ 時点 $(m \geq 1)$ の第 i 資産の収益率 $\tilde{r}_{ij,t+m} \mid \Psi_t$ $(i, j=1,2)$ が得られる。

Q.E.D.

Appendix C

$m \geq 1$ のとき，時点 t の情報集合 $\psi_{1,t}$ あるいは $\psi_{2,t}$ の下での $t+m$ 時点の第 i 資産の第 j ファクターの期待収益率モデルの誤差項の無条件分散 σ_{ij}^2 $(i, j=1,2)$ を以下のように定義する。ここで，期待収益率モデルの誤差項の無条件分散とは現時点の情報の下での無限に遠い将来のある時点の期待収益率モデルの誤差項の分散を意味する。そこで，まず第 i 資産の第 1 ファクターの期待収益率モデルの誤差項の無条件分散 σ_{i1}^2 $(i=1,2)$ を求めるために，時点 t の情報集合 Ψ_t $(=\psi_{1,t}$ あるいは $\psi_{2,t})$ の下での $t+m$ 時点 $(m \geq 1)$ の期待収益率モデルの誤差項の分散を(3)式から求め，$m \to \infty$ にすると，次式となる。

$$\begin{aligned}\sigma_{i1}^2 &\equiv \lim_{m\to\infty} \mathrm{Var}(\varepsilon_{i1,t+m} \mid \Psi_t) \\ &= \alpha_{i1} + \sum_{j=1}^{2}(\beta_{ij1}+\gamma_{ij1}) \lim_{m\to\infty} [\mathrm{Var}(\varepsilon_{j2,t+m-1}^2 \mid \Psi_t)] = \alpha_{i1} + \sum_{j=1}^{2}(\beta_{ij1}+\gamma_{ij1})\,\sigma_{j2}^2. \qquad (c1)\end{aligned}$$

同様に，第 i 資産の第 2 ファクターの期待収益率モデルの誤差項の無条件分散 σ_{i2}^2 $(i=1,2)$ を求める。

$$\begin{aligned}\sigma_{i2}^2 &\equiv \lim_{m\to\infty} \mathrm{Var}(\varepsilon_{i2,t+m} \mid \Psi_t) \\ &= \alpha_{i2} + \sum_{j=1}^{2}(\beta_{ij2}+\gamma_{ij2}) \lim_{m\to\infty} [\mathrm{Var}(\varepsilon_{j1,t+m}^2 \mid \Psi_t)] = \alpha_{i2} + \sum_{j=1}^{2}(\beta_{ij2}+\gamma_{ij2})\,\sigma_{j1}^2. \qquad (c2)\end{aligned}$$

(c1)式と(c2)式を行列表示して，書き直すと次式となる。

$$\begin{bmatrix}\alpha_{1i}\\ \alpha_{2i}\end{bmatrix} + \mathbf{B}_i \begin{bmatrix}\alpha_{1,3-i}\\ \alpha_{2,3-i}\end{bmatrix} = (\mathbf{I}_2 - \mathbf{B}_i\mathbf{B}_{3-i}) \begin{bmatrix}\sigma_{1i}^2\\ \sigma_{2i}^2\end{bmatrix} \quad \text{for} \quad i=1,2. \qquad (c3)$$

ここで,

$$\mathbf{B}_i \equiv \begin{bmatrix} \beta_{11i}+\gamma_{11i} & \beta_{12i}+\gamma_{12i} \\ \beta_{21i}+\gamma_{21i} & \beta_{22i}+\gamma_{22i} \end{bmatrix}, \tag{c4}$$

(c3)式から期待収益率モデルの誤差項の無条件分散は次式となる。

$$\begin{bmatrix} \sigma_{1i}^2 \\ \sigma_{2i}^2 \end{bmatrix} = (\mathbf{I}_2 - \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{-1}\left[\begin{bmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \end{bmatrix} + \mathbf{B}_1\begin{bmatrix} \alpha_{1,3-i} \\ \alpha_{2,3-i} \end{bmatrix}\right] \quad \text{for} \quad i=1,2. \tag{c5}$$

ここで,上付き添え字 −1 は逆行列を表す。

次に,時点 t の情報集合 $\psi_{1,t}$ での $t+j$ 時点の第 1 ファクターの期待収益率モデルの誤差項の条件付分散を求める。そこでまず,時点 t の情報集合 $\psi_{1,t}$ の下での $t+j$ 時点の第 1 ファクターの収益率の誤差項の条件付分散と無条件分散の差を G_{i1j} ($\equiv \mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{i1,t+j}\,|\,\psi_{1,t}) - \sigma_{i1}^2$, $i=1,2$, $j \geq 1$) と定義する。次に,(3)式から求められる $\mathrm{Var}(\varepsilon_{i1,t+j}\,|\,\psi_{1,t})$ ($i=1,2$) に再帰的代入を行うと,次式になる。

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} G_{11j} \\ G_{21j} \end{bmatrix} &\equiv \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{11,t+j}\,|\,\psi_{1,t}) - \sigma_{11}^2 \\ \mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{21,t+j}\,|\,\psi_{1,t}) - \sigma_{21}^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{bmatrix} + \mathbf{B}_1\begin{bmatrix} \mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{12,t+j-1}\,|\,\psi_{1,t}) \\ \mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{22,t+j-1}\,|\,\psi_{1,t}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 \\ \sigma_{21}^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{bmatrix} + \mathbf{B}_1\begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix} + \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2\begin{bmatrix} \mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{11,t+j-1}\,|\,\psi_{1,t}) \\ \mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{21,t+j-1}\,|\,\psi_{1,t}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 \\ \sigma_{21}^2 \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2\begin{bmatrix} \mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{11,t+j}\,|\,\psi_{1,t}) - \sigma_{11}^2 \\ \mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{21,t+j}\,|\,\psi_{1,t}) - \sigma_{21}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2\begin{bmatrix} G_{11,j-1} \\ G_{21,j-1} \end{bmatrix} = (\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1}\begin{bmatrix} G_{11,1} \\ G_{21\ 1} \end{bmatrix} \\
&= (\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1}\begin{bmatrix} \mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{11,t+1}\,|\,\psi_{1,t}) - \sigma_{11}^2 \\ \mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{21,t+1}\,|\,\psi_{1,t}) - \sigma_{21}^2 \end{bmatrix} = (\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1}\left[\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 \\ \sigma_{21}^2 \end{bmatrix} + \mathbf{B}_1\begin{bmatrix} h_{12,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix}\right] \\
&= (\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1}\begin{bmatrix} \alpha_{11} - \sigma_{11}^2 \\ \alpha_{21} - \sigma_{21}^2 \end{bmatrix} + (\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1}\mathbf{B}_1\begin{bmatrix} h_{12,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{c6}$$

ここで,$(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^0 \equiv \mathbf{I}_2$ である。同様に,時点 t の情報集合 $\psi_{2,t}$ の下での $t+j$ 時点の第 1 ファクターの収益率の誤差項の条件付分散と無条件分散の差を $\hat{G}_{i1j}$ ($\equiv \mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{i1,t+j}\,|\,\psi_{2,t}) - \sigma_{i1}^2$, $i=1,2$, $j \geq 1$) と定義する。次に,(3)式から求

められる $\mathrm{Var}(\varepsilon_{i1,t+j}\mid\psi_{2,t})\ (i=1,2)$ に再帰的代入を行うと，次式になる。

$$\begin{bmatrix}\hat{G}_{11j}\\ \hat{G}_{21j}\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{11,t+j}\mid\psi_{2,t})-\sigma_{11}^2\\ \mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{21,t+j}\mid\psi_{2,t})-\sigma_{21}^2\end{bmatrix}$$
$$=(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1}\begin{bmatrix}G_{11,1}\\ G_{21,1}\end{bmatrix}=(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1}\begin{bmatrix}\mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{11,t+1}\mid\psi_{2,t})-\sigma_{11}^2\\ \mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{21,t+1}\mid\psi_{2,t})-\sigma_{21}^2\end{bmatrix}=(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1}\begin{bmatrix}h_{11,t+1}-\sigma_{11}^2\\ h_{21,t+1}-\sigma_{21}^2\end{bmatrix}\tag{c7}$$

ここで，$(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)^0\equiv\mathbf{I}_2$ であり，$h_{11,t+1}$ と $h_{21,t+1}$ は情報集合 $\psi_{2,t}$ の下での(3)式の既知のデータから得られる。(c6)式と(c7)式をまとめると，次式となる。

$$\begin{bmatrix}\mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{11,t+j}\mid\Psi_t)\\ \mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{21,t+j}\mid\Psi_t)\end{bmatrix}=\begin{cases}\begin{bmatrix}\sigma_{11}^2\\ \sigma_{21}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1}\begin{bmatrix}\alpha_{11}-\sigma_{11}^2\\ \alpha_{21}-\sigma_{21}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1}\mathbf{B}_1\begin{bmatrix}h_{12,t}\\ h_{22,t}\end{bmatrix} & \text{if}\quad \Psi_t=\psi_{1,t}\\ \begin{bmatrix}\sigma_{11}^2\\ \sigma_{21}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)^{j-1}\begin{bmatrix}h_{11,t+1}-\sigma_{11}^2\\ h_{21,t+1}-\sigma_{21}^2\end{bmatrix} & \text{if}\quad \Psi_t=\psi_{2,t}\end{cases}\tag{c8}$$

同様に，時点 t の情報集合 Ψ_t（$=\psi_{1,t}$ あるいは $\psi_{2,t}$）での $t+j$ 時点（$j\geq1$）の第１ファクターと第２ファクターの期待収益率モデルの誤差項の条件付分散を求め，まとめると次式となる。

$$\begin{bmatrix}\mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{12,t+j}\mid\Psi_t)\\ \mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{22,t+j}\mid\Psi_t)\end{bmatrix}=\begin{cases}\begin{bmatrix}\sigma_{12}^2\\ \sigma_{22}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)^{j}\begin{bmatrix}h_{12,t}-\sigma_{12}^2\\ h_{22,t}-\sigma_{22}^2\end{bmatrix} & \text{if}\quad \Psi_t=\psi_{1,t}\\ \begin{bmatrix}\sigma_{12}^2\\ \sigma_{22}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)^{j-1}\begin{bmatrix}\alpha_{12}-\sigma_{12}^2\\ \alpha_{22}-\sigma_{22}^2\end{bmatrix}+(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)^{j-1}\mathbf{B}_2\begin{bmatrix}h_{11,t+1}\\ h_{21,t+1}\end{bmatrix} & \text{if}\quad \Psi_t=\psi_{2,t}\end{cases}\tag{c9}$$

Q.E.D.

〔注〕

1）分散の平方根をボラティリティとよぶ。

2）Merton（1976）は，将来の任意の時点の株価が対数正規分布すると仮定すれば，Black and Scholes（1973）の公式の中では，その任意の時点の収益率のボラティリティが現時点からその時点までの収益率のボラティリティに等しくなることを証明している。

3) GARCH モデルは Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Model の略である。

4) 拙稿 (1993) の2変量 AR(1)-GARCH(1, 1) モデルは次式である。

$$\begin{aligned} r_{it} &= c_i + a_i r_{3-i,\,t+i-2} + \varepsilon_{it}\,, \\ &\varepsilon_{i1,t} \mid \psi_{2,t-1} \sim N(0, h_{i1,t}), \quad \varepsilon_{i2,t} \mid \psi_{1,t} \sim N(0, h_{i2,t}), \\ &E[\varepsilon_{i1,t}\varepsilon_{ij,t+s} \mid \psi_{2,t-1}] = E[\varepsilon_{i2,t}\varepsilon_{ij,t+s} \mid \psi_{1,t}] = 0, \\ &E[\varepsilon_{i1,t}\varepsilon_{i2,t} \mid \psi_{2,t-1}] = \rho_{i1,i2}\sqrt{h_{i1,t}h_{i2,t}}\,, \quad E[\varepsilon_{i2,t}\varepsilon_{i1,t+1} \mid \psi_{1,t}] = \rho_{i2,i1}\sqrt{h_{i2,t}h_{i1,t+1}} \\ h_{it} &= \alpha_i + \beta_i \varepsilon^2_{3-i,\,t+i-2} + \gamma_i h_{3-i,\,t+i-2}\,, \qquad\qquad i, j = 1, 2, \quad s = 1, 2, \cdots. \end{aligned}$$

ここで上の r_{it} 式は一見，1変量 AR(1) モデルではないかのようであるが，再帰的に代入すると，

$$r_{it} = c_i + c_{3-i}a_i + a_1 a_2 r_{i,t-1} + a_i \varepsilon_{3-i,\,t+2-i} + \varepsilon_{it}, \quad \text{for} \quad i = 1, 2.$$

となり，まさに1変量 AR(1) モデルの型になる。ここで，$\varepsilon_{3-i,\,t+2-i}$ は残差であり，観測時点では既知である。

5) VAR(p) モデルは p 次のベクトル自己回帰モデル (Vector Autoregressive Model) を表す。

6) 将来的には多変量 VAR(1)-GARCH(1, 1) モデルの下での，将来 n 期間の収益率の条件付分散を求める。

7) 以下では同一市場での2種類の資産の説明を行い，2市場での同一資産のケースを考える場合には，資産という言葉を市場に置き換えれば，以下の議論には影響しない。

8) 2変量 VAR(1) モデルは次式で表される。

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

ここで(2)式は一見，2変量 VAR(1) モデルではないかのようであるが，再帰的に代入すると，

$$\mathbf{r}_{it} = \mathbf{c}_i + \mathbf{A}_i \mathbf{c}_j + \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j \mathbf{r}_{it-1} + \mathbf{A}_i \mathbf{e}_{ij,\,t+2-i} + \mathbf{e}_{it}, \quad \text{for} \quad i = 1, 2, \quad j = 3 - i.$$

となり，まさに2変量 VAR(1) モデルの型になる。ここで，$\mathbf{e}_{ij,\,t+2-i}$ は残差であり観測時点では既知である。

9) ここで，$\rho_{i1,i2}$ はモデルの簡素化のために，時間に依存しない相関係数に限定したが，もちろん時間依存型相関係数を想定することも可能である。その場合，GARCH モデルに時間依存型共分散の4式が加わることになる。

10) (1)式より時点 t+1 から時点 t+m までの第 i 資産の第 j ファクターの収益率は

$$\sum_{s=t+1}^{t+m} r_{ij,s} = \sum_{s=t+1}^{t+m} \ln\left(\frac{p_{ij,s}}{p_{i3-j,s+j-2}}\right) = \ln\left(\frac{p_{ij,t+m}}{p_{i3-j,t+j-1}}\right).$$

となり，資産の時点 $t+1$ と時点 $t+m$ の価格だけで計算される。

11) ここで,

$$\mathrm{Var}(\widetilde{r}_{ij,t+s} \mid \Psi_t) = (E[\widetilde{r}_{ij,t+m} - E[\widetilde{r}_{ij,t+m} \mid \psi_{3-i,t+i-2}] \mid \psi_{3-i,t+i-2}])^2 .$$

である。

〔参考文献〕

Akgiray, V., 1989, “Conditional Heteroskedasticity in Time Series of Stock Returns: Evidence and Forcasts,” *Journal of Business*, 66(1), pp. 55–80.

Ballie, R. T. and T. Bollerslev, 1992, “Prediction in Dynamic Models with Time-Dependent Conditional Variances,” *Journal of Econometrics*, 55, pp. 91–113.

Black, F. and M. Scholes, 1973, “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637–654.

Bollerslev, T., 1986, “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307–327.

Engel, R. F., 1982, “Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Esitimates of the Variance of U.K. Infration,” *Econometrics*, 50, pp. 987–1008.

Engle, R. F. and D. F. Kraft, 1983, “Multiperiod Forecast Error Variances of Infration Estimated from ARCH Models,” in Zellner, A., *Applied Time Series Analysis of Economic Data*, Washington. D. C., Depertment of Commerce, Bureau of the Census, pp. 293–302.

Merton, R. K., 1976, “Options Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous,” *Journal of Financial Economics*, 3, pp. 125–144. Reprinted in Chapter 9, *Continuous-Time Finance*, Basil Blackwell, Massachusetts, 1990.

Mills, T. C., 1990, “Conditional Variance Models and Related Topics,” in *Time Series Technique for Economists*, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 325–341.

中川裕司, 1993,「ARCH モデルによる日中・夜間収益率の条件付きボラティリティの推定」『日本経営数学会誌』第 15 号, pp. 11–20.

Sims, C., 1980, “Macroeconomics and Reality,” *Econometrica*, 48, pp. 1–48.

Weiss, A. A., 1986, “ARCH and Bilinear Time Series Models: Comparision and Combination,” *Journal of Business & Economic Statistics*, 4, pp. 59–70.