TOPIX の夜間・日中変化率のジャンプ項を持つ ARFIMAX-GARCH モデル

中　川　裕　司

1. はじめに

本稿では ARFIMA モデルかつ GARCH モデルの一群を使用して，夜間変化率（前一営業日の終値から翌営業日の始値の変化率）と日中変化率（一営業日の始値から終値の変化率）とそのボラティリティの変動の特徴を検証する。特に，変化率あるいは変化率のボラティリティの自己相関係数が長い期間に渡ってゼロになりにくい「長期記憶性」，資産の変化率のボラティリティがいったん上昇（低下）すると，その後しばらくの間ボラティリティの高い（低い）日が続く「ボラティリティ・クラスタリング（volatility clustering）」とともに，株価が下がった日の翌日のボラティリティは上がった日の翌日のボラティリティよりも上昇するという「ボラティリティ変動の非対称性（Levarege effect）」[1)]の 3 点を検証する。

次節では，変化率のジャンプ変数として，実現したボラティリティ（RV: Realized Volatility）と Bi-Power Variation と実現したジャンプ（RJ: Realized Jumps）を定義して，3 節と 4 節の 1・2 次のモーメントの複数の推定モデルをサーベイして，5 節でジャンプ変数の有無のモデルを比較しながら推定を行い，6 節で結果を論じる。

2. ジャンプの予備分析

まず，r_{ot} を夜間変化率，r_{dt} を日中変化率として時点 t での値をそれぞれ(1)のように定義する。

$$r_{ot} = \ln\left(p_t^{open} \Big/ p_{t-1}^{close}\right), \quad r_{dt} = \ln\left(p_t^{close} \Big/ p_t^{open}\right). \tag{1}$$

ここで，p_t^{open} は第 t 日の始値，p_t^{close} は第 t 日の終値を表し，$t-1$ は第 t 日の 1 営業日前を示す[2)]。価格データは TOPIX の 1991 年 1 月 4 日から 2009 年 9 月 30 日の 4,615 の四本値を使用した時系列データを使用する。さらに，(1)より第 t 日の夜間変化率と日中変化率の RV をそれぞれ RV_{ot} と RV_{dt} として(2)で定義する[3)]。

$$RV_{it} = r_{it}^2, \qquad i = o, d \,. \tag{2}$$

Barndorff-Nielsen *et al.*〔24〕〔25〕〔26〕による Bi-Power Variation（BV_{ot} と BV_{dt}）を利用して，(3)のようにジャンプ変数を定義した[4)]。

$$BV_{it} = \pi \left| r_{it} \right| \left| r_{it-1} \right| / 2, \qquad i = o, d \,. \tag{3}$$

ここで，Giot *et al.*〔64〕と Tauchen and Zhou〔100〕と Czubala〔47〕と Lanne〔83〕と Eraker〔59〕[5)]はジャンプの検定を行っている。そこで，彼らに従って RJ の推定量を(4)とする。

$$RJ_{it} \equiv \max\left\{ RV_{it} - BV_{it}, 0 \right\}, \qquad i = o, d, up, dw \,. \tag{4}$$

次節では 1 次のモーメントモデルのサーベイを行う。

3. 1 次のモーメントモデルの同定

1 次のモーメントモデルは大別して 2 種類存在する。一つは(5)である[6)]。

$$\begin{aligned} r_{it} &= E\left[r_{it} \mid \Omega_{t-1} \right] + \varepsilon_{it}, \qquad \varepsilon_{it} \overset{i.i.d.}{\sim} D\left(0, \sigma_{\varepsilon_i}^2\right), \\ &= E\left[r_{it} \mid \Omega_{t-1} \right] + z_t \sigma_{it}, \qquad z_t \overset{i.i.d.}{\sim} D\left(0, 1\right), \end{aligned} \qquad i = o, d \,. \tag{5}$$

ここで，Ω_t は時点 t の情報集合 $\left\{ \varepsilon_{it}, \varepsilon_{it-1}, \cdots \right\}$，$D\left(0, \sigma_{\varepsilon_i}^2\right)$ は平均 0，分散 $\sigma_{\varepsilon_i}^2$ の分布を表す。以下では，夜間 (o) と日中 (d) を表す下付き添え字を省略して表示する。これまでの自己回帰モデルの延長上にあり，(6)は Granger〔69〕と Granger and Joyeux〔70〕と Hosking〔76〕が考案した小数ARIMA/ARFIMA (Autoregressive Fractionally Integrated Moving Anerage) (p, d, q) モデルに x_{ij} を加えた ARFIMAX モデルである[7)]。

$$\Psi\left(L\right)\left(1 - L\right)^{\xi}\left(r_t - \mu_t\right) = \Theta\left(L\right)\varepsilon_t, \quad \mu_t = \mu + \sum_{j=1}^{n_1} \delta_j x_{jt}, \quad \varepsilon_t \sim WN\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right). \tag{6}$$

ここで，μ と δ_j はパラメータ，n_1 は有限整数，$WN\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$ は W 平均 0，分散 σ_ε^2 のホワイトノイズを表す。また，L はラグオペレータを表し，$L^j r_t = r_{t-j}$ $\left(j = 0, 1, \cdots\right)$ である。ただし，$\Psi\left(L\right) = 0$，$\Theta\left(L\right) = 0$ の根の絶対値はすべて 1 より大きいものと仮定し，それぞれラグ多項式

$\Psi(L)=1-\sum_{j=1}^{p}\psi_j L^j$，$\Theta(L)=1+\sum_{j=1}^{q}\theta_j L^j$ である。また，(6)の左辺の $(1-L)^{\zeta}$ は(7)である。

$$
\begin{aligned}
(1-L)^{\zeta} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\zeta+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\zeta+k+1)}L^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\zeta}{k}(-L)^k \\
&= 1-\zeta L-\frac{1}{2}\zeta(1-\zeta)L^2-\frac{1}{6}\zeta(1-\zeta)(2-\zeta)L^3-\cdots \\
&= 1-\sum_{k=1}^{\infty}c_k(\zeta)L^k = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(\zeta-1)\cdots(\zeta-k+1)}{k!}(-L)^k .
\end{aligned}
\tag{7}
$$

である。ここで，$c_1(\zeta)=\zeta$，$c_2(\zeta)=\zeta(1-\zeta)/2$ などであり，任意の ζ にたいして $\sum_{k=1}^{\infty}c_k(\zeta)$ である。また，(7)の最後の等式は $L=0$ でテーラー展開することによって得られる。Brockwell and Davis〔39〕と Chang and Dickey〔41〕によれば，長期記憶過程のパラメトリック・モデルにおける h 次の自己相関関数 $\rho(h)$ は $\sum_{k=1}^{\infty}|\rho(k)|=0$ を満たし，かつ $\lim_{h\to\infty}\rho(h)=h^{-a}$ を満たす a が存在することが知られている。ARFIMA モデルの自己相関関数は $\lim_{h\to\infty}\rho(h)=h^{2a-1}$ と表されるから，Hosking〔76〕によれば，$0<\zeta<0.5$ のとき長期記憶性（long memory）が存在し，$-0.5<\zeta<0$ のとき短期記憶性（short memory）または overdifferenced と呼ばれ，$\zeta<0.5$ のとき y_t は定常過程となり，$\zeta\geq 0.5$ のとき y_t は非定常過程となる。さらに，$\zeta=0$ のとき ARMA(p, q) モデル[8]，$\zeta=1$ のとき ARIMA(p, q) モデルとなる[9]。

まもう一種類は，Engle and Sun〔57〕によって考案されたボラティリティ変動モデルから展開された(8)であり，ARCH-in-Mean モデルと呼ばれる。これは条件付き分散の変化によってリスクプレミアムが時間とともに変動し，これが変化率へ影響を与えるボラティリティのフィードバック効果として現れる[10]。

$$
r_t = E_{t-1}[r_t]+\theta\sigma_t^{\lambda}+\sigma_t z_t . \tag{8}
$$

ここで，θ はパラメータ，λ は 1 又は 2 を表し，(8)で表される変化率がボラティリティで説明できるかどうかを検証することができる。

次節では，2 次のモーメントモデルをサーベイする。

4. 2 次のモーメントモデルの同定

ボラティリティ変動モデルは 2 次のモーメントモデルが ARCH 型モデルと SV モデルに大別される[11]。本節では近年ボラティリティの予測のために実証分析の分野で多用されている ARCH 型モデルを中心にサーベイして，拙稿〔 8 〕の予備分析の結果と整合的なモデルに限定して以降でサーベイを行う。

Engle〔53〕によって展開された ARCH モデルを一般化した Bollerslev〔31〕の GARCH モデ

ルを使用した実証分析の拙稿〔 2 〕〔 3 〕，1990 年代半ばまでの (G)ARCH モデルのサーベイとして Bollerslev *et al.*〔34〕，その後，Hansen and Lunde〔72〕は様々な単一変量 GARCH 型モデルで分析している[12)]。GARCH モデルのサーベイとしては Palma〔92〕がある。Engle and Sun〔58〕は日次ボラティリティとティックボラティリティがそれぞれ GARCH モデルに従うときの分析を行っている。

多変量モデルとしては，拙稿〔 1 〕は 2 変量 ARCH モデル，拙稿〔 7 〕は 2 変量 VAR(1)-GARCH(1, 1) モデル，拙稿〔 4 〕〔 5 〕は複合不均一分散 (HM) モデルを推定し，拙稿〔 6 〕は 2 変量 VAR(1)-GARCH(1, 1) モデルによる変化率と変化率のボラティリティの将来予測を解析し，拙稿〔 9 〕は VARMA-GARCH モデルの推定法を論じている。また Andersen *et al.*〔18〕は GARCH モデルを使った 3 変量 VAR-RV モデル，Andersen *et al.*〔19〕は 30 分毎の為替レートの変化率の 2 乗の合計による RV の ARMA(1, 1) モデルと GARCH(1, 1) モデルによる分散とを比較分析している。Laurent *et al.*〔85〕は共分散構造を有する多変量 GARCH モデルを使ったボラティリティ予測を考察している[13)]。以下では，本節で分析に使用するモデルを中心に示しておく。

Bollerslev and Mikkelsen〔33〕によって考案された FIEGARCH (Fractionally Integrated EGARCH) (p, d, q) モデルが(9)である[14)]。

$$\ln\left(\sigma_t^2\right) = \omega + \phi\left(L\right)^{-1}\left(1-L\right)^{-\theta}\left(1+\alpha\left(L\right)\right)\left[\gamma_1 z_t + \gamma_2\left(\left|z_t\right| - E\left[\left|z_t\right|\right]\right)\right]. \tag{9}$$

ここで，ω と γ_j はパラメータ，$\alpha\left(L\right)=\sum_{i=1}^{q}\alpha_i L^i$，$\phi\left(L\right)=\sum_{i=1}^{p}\phi_i L^i$，$L^j x_j = x_{t-j}$ であり，θ は(6)の ξ に相当し，記憶性についても同様の議論が成立し[15)]，Davidson〔48〕によれば，このプロセスの記憶性のパラメータはマイナス θ であり，θ がゼロに近づくに従って長期記憶性は増加する。$\theta=0$ のときには，(9)の右辺の $\gamma_1 z_1$ は符号効果 (sign effect) であり，$\gamma_2\left(\left|z_t\right| - E\left[\left|z_t\right|\right]\right)$ は規模効果 (magnitude effect) となる。Laurent〔84〕(p.80) によれば，$E\left[\left|z_t\right|\right]$ は z_t の無条件確率分布への仮定に従う。たとえば，正規分布に従うとき，(10)となる。

$$E\left[\left|z_t\right|\right] = \sqrt{2/\pi}\ . \tag{10}$$

Skewed-Student 分布の場合には(11)となる。

$$E\left[\left|z_t\right|\right] = \frac{4\xi^2}{\xi + 1/\xi}\frac{\Gamma\left(\left(1+\nu\right)/2\right)\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu/2\right)}\ . \tag{11}$$

$\xi=1$ のとき対称スチューデント (Symmetric Student) 分布の期待値となる。GED の場合，(12)となる。

$$E\left[\left|z_t\right|\right] = 2^{1/\nu}\lambda_\nu\,\Gamma\left(2/\nu\right)/\Gamma\left(1/\nu\right). \tag{12}$$

Ding *et al.*〔51〕によって考案された AP(G)ARCH (Asymmetric Power (G)ARCH) (p, q) モ

デルが(13)であり，Ding *et al.*〔51〕と He and Terasvirta〔74〕が特徴を示している[16)]。

$$\sigma_t^{\delta} = \omega + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \left(\left|\varepsilon_{t-j}\right| - \gamma_j \varepsilon_{t-j}\right)^{\delta} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^{\delta} \omega > 0, \quad \alpha_j, \beta_j, \delta \geq 0, \quad -1 < \gamma_j < 1 . \tag{13}$$

ここで，α_j と β_j はパラメータ，δ は σ_{it} の Box-Cox 変換であり，γ_j はボラティリティの非対称性に影響する。Giot and Laurent〔63〕は p＝0 かつ q＝1 のモデルを使っている。また，δ が 2 と有意に異なり，1 とは有意に異ならないことは変化率の 2 乗よりも絶対値の方が有意に関連し（いわゆる「長期記憶性」が存在）と Taylor〔101〕，Schwert〔95〕，Ding *et al.*〔51〕が示していることと整合的である。

Laurent〔84〕(p. 84) によれば，(13)のうち，$\delta=2$, $\beta_j=0$, $\gamma_j=0$, $\forall_j$ のとき Engle〔53〕の ARCH モデル，$\delta=2$，$\gamma_j=0$，$\forall_j$ のとき Bollerslev〔31〕の GARCH（p, q）モデル[17)]，$\delta=1$，$\gamma_j=0$，$\forall_j$ のとき Taylor〔101〕と Schwert〔96〕の GARCH モデル，$\delta=2$ のとき Glosten *et al.*〔65〕の GJR (p, q) モデル[18)]，$\delta=1$ のとき Zakoian〔104〕の閾値 GARCH（TARCH: Threshold GARCH）モデル，$\beta_j=0$，$\gamma_j=0$，$\forall_j$ のとき Higgins and Bera〔75〕の非線形 ARCH（NARCH: Nonlinear ARCH）モデル，$\delta \to \infty$ のとき Geweke〔61〕と Pentula〔94〕の対数 ARCH（Log-ARCH）モデル，$i=q=1$，$\gamma_j=0$，$\forall_j$ のとき APARCH (1, 1) モデルである。

Ding *et al.*〔51〕によれば，もし $\omega>0$ かつ $\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \left(\left|\varepsilon_{t-j}\right| - \gamma_j \varepsilon_{t-j}\right)^{\delta} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^{\delta} < 1$ ならば，(13)の定常解が存在し，(14)と表される。

$$E\left[\sigma_t^{\delta}\right] = \frac{\omega}{1 - \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \left(\left|\varepsilon_{t-j}\right| - \gamma_j \varepsilon_{t-j}\right)^{\delta} - \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^{\delta}} . \tag{14}$$

また，$\delta=2$，$\gamma_j=0$，$\forall_j$ かつ $z_t \sim N(0,1)$ ならば，GARCH(1, 1) モデルの定常条件が $\alpha+\beta<1$ であるが，$\delta \neq 2$ あるいは $\gamma_j \neq 0$ ならば，定常条件は z_t の仮定されたプロセスに依存することが知られている[19)]。

Tse〔102〕によって考案された FIAPARCH(p, d, q)-BBM モデルは(15)であり，Cheong〔42〕が使用している。

$$\sigma_t^{\delta} = \omega + \left[1 - \left(1 - \beta\left(L\right)\right)^{-1} \phi\left(L\right)\left(1 - L\right)^{\theta}\right]\left(\left|\varepsilon_t\right| - \gamma\varepsilon_t\right)^{\delta} . \tag{15}$$

(15)の $\gamma=0$ かつ $\delta=2$ のとき，Baillie *et al.*〔20〕と Kruse〔81〕[20)] と Davidson〔48〕と Cheong〔42〕が使用する FIGARCH(p, d, q)-BBM（fractionally Integrated GARCH-BBM）モデルが(17)となる[21)]。

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \omega\left(1 - \beta\left(L\right)\right)^{-1} + \left\{1 - \left(1 - \beta\left(L\right)\right)^{-1} \phi\left(L\right)\left(1 - L\right)^{\theta}\right\} \varepsilon_t^2 \\ &= \omega^* + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j L^j \varepsilon_t^2 = \omega^* + \lambda\left(L\right)\varepsilon_t^2. \end{aligned} \tag{16}$$

ここで，ω^* は ε_t^2 以外の項を含むパラメータであり，(16)が正であるための十分条件は $\omega>0$ か

表 1A. 夜間変化率の ARFIMAX$(0,\zeta,0)$–FIAPARCH$(1,\theta,1)$/FIEGARCH$(1,\theta,1)$–Meam モデル

$$(1-L)^{\zeta}\left(r_{ot}-c_0-c_1D_t-c_2r_{dt-1}-\lambda\sigma_t^2\right)=\varepsilon_t,$$

$$\begin{cases}\sigma_t^{\delta}\equiv E\left[\varepsilon_t^{\delta}\middle|\Omega_{t-1}\right]=\omega+\left\{1-\left(1-\beta_1\right)^{-1}\phi_1\left(1-L\right)^{\theta}\right\}\left(\left|\varepsilon_t\right|-\gamma\varepsilon_t\right)^{\delta},\\ \ln\sigma_t^2\equiv\ln\left(E\left[\varepsilon_t^2\middle|\Omega_{t-1}\right]\right)=\omega+\phi_1^{-1}\left(1-L\right)^{-\theta}\left(1+\beta_1\right)\left\{\gamma_1z_t+\gamma_2\left(\left|z_t\right|-E\left[\left|z_t\right|\right]\right)\right\},\end{cases}$$

$$D_t=\begin{cases}1 & \text{前の 2 日間が休場だったとき,}\\ 0 & \text{その他.}\end{cases}$$

モデル	FIAPARCH$(1,\theta,1)$		FIEGARCH$(1,\theta,1)$
従属変数	r_{ot},σ_t^{δ}		$r_{ot},\ln\sigma_t^2$
モデル	BBM モデル	Chung モデル	
誤差項の分布	GED[(b)]	Skewed-Student[(c)]	Normal[(d)]
c_0	0.015834** (0.0028)	0.012567* (0.0113)	0.012182 (0.0622)
c_1	0.014057 (0.0935)	0.019280* (0.0152)	0.018454* (0.0274)
c_2	0.020476** (0.0000)	0.019603** (0.0000)	0.023751** (0.0000)
λ	0.047714 (0.2517)	0.101115* (0.0109)	0.066538 (0.1683)
ζ	0.020476$^{*[**]}$ (0.0209) [0.0000]	0.025587$^{*[**]}$ (0.0296) [0.0000]	0.026410$^{*[**]}$ (0.0139) [0.0000]
ω	0.000260 (0.5246)	0.008009* (0.0218)	−10.016542** (0.0000)
ϕ_1	0.202661** (0.0000)	0.260072** (0.0004)	−0.433803** (0.0010)
β_1	0.745805** (0.0000)	0.450637** (0.0000)	0.963312** (0.0000)
γ	0.089501* (0.0414)	0.211898** (0.0013)	
γ_1			−0.046661** (0.0023)
γ_2			0.179558** (0.0000)
δ	2.029239$^{**\langle**\rangle}$ (0.0000) ⟨0.0000⟩ {0.2526}	2.350503$^{**[**]\{**\}}$ (0.0000) ⟨0.0000⟩ {0.0009}	
θ	0.644000** (0.0000) [0.1554]	0.263131$^{**[**]}$ (0.0000) [0.0000]	0.157150$^{**[**]}$ (0.0000)
Log Likelihood	−1410.341	−1364.828	−1405.169
AIC	0.617904	0.5984052	0.6154914
Shibata の情報量	0.614092	0.5945921	0.6121125
Schwartz の情報量	0.613374	0.5938732	0.6113589
Asymmetry Coefficient		−0.130576** (0.0000)	
Tail Coefficient		100.000000** (0.0000)	

( )内は p 値を表し，[ ]は帰無仮説：回帰係数 > 0.5 に対する p 値を表し，〈 〉は帰無仮説：回帰係数 > 1 に対する p 値を表し，{ }は帰無仮説：回帰係数 > 2 に対する p 値を表し，**(*)は有意水準 1%(5%) でゼロ仮説検定を棄却されるものを表す。

(a) 2 次のモーメント式を書き換えると

$$\left(1-\beta_1\right)\left\{\omega+\left(\left|\varepsilon_t\right|-\gamma\varepsilon_t\right)^{\delta}-\sigma_t^{\delta}\right\}=\phi_1\left(1-L\right)^{d}\left(\left|\varepsilon_t\right|-\gamma\varepsilon_t\right)^{\delta}.$$

となる。

(b) 誤差項がスチューデントの t 分布，GED 分布あるいは Skewed-Student 分布に従うと仮定した場合には対数尤度は収束しなかった。

(c) 渡部・佐々木〔11〕と Giot and Laurent〔63〕によれば，Skewed-Student 分布の分散を 1 に基準化した Skewed-Student 分布の密度関数は

$$f\left(\rho_t \mid \xi,\nu\right)=\begin{cases}2sg\left(\xi\left(s\rho_t+m\right)\mid\nu\right)\Big/\left(\xi+1/\xi\right), & \rho_t<-m/s,\\ 2sg\left(\left(s\rho_t+m\right)/\xi\mid\nu\right)\Big/\left(\xi+1/\xi\right), & \rho_t\geq -m/s\,.\end{cases}$$

ここで，$g(\cdot|\nu)$ は分散を 1 に基準にした自由度 ν の t 分布の確率密度関数である。

$$m=\Gamma\left(\left(\nu-n\right)/2\right)\sqrt{\nu-2}\left(\xi-1/\xi\right)\Big/\left(\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu/2\right)\right),\qquad s=\sqrt{\xi^2-1/\xi^2-1-m^2}\,.$$

ただし，$\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数を表す。この確率密度関数は ξ と ν の 2 つのパラメータに依存し，ξ は分布の歪みを表し，$\xi=1$ であれば左右対称，$\xi>1(\xi<1)$ であれば分布の右（左）裾が厚い。ν は分布の裾の厚さを表し，ν が低いほど分布の裾は厚い。

(d) 誤差項がスチューデントの t 分布，GED 分布あるいは Skewed-Student 分布に従うと仮定した場合には対数尤度は収束しなかった。

つ $0\leq\theta\leq1$ かつ $\beta_1-\theta\leq\phi_1\leq(2-\theta)/3$ かつ $\phi_1-(1-\theta)/2\leq\beta_1(\phi_1-\beta_1+\theta)$ である。

FIAPARCH(p, d, q)-Chung モデルは(17)である。

$$\sigma_t^\delta=\sigma^2+\left[1-\left(1-\beta\left(L\right)\right)^{-1}\phi\left(L\right)\left(1-L\right)^\theta\right]\left(\varepsilon_t^2-\sigma^2\right)^\delta. \tag{17}$$

また，Chung〔43〕は Baillie *et al.*〔20〕による(17)とは異なる(18)の FIGARCH(p, d, q)-Chung モデルを考案した。

$$\sigma_t^2=\sigma^2+\left[1-\left[1-\beta\left(L\right)\right]^{-1}\phi\left(L\right)\left(1-L\right)^\theta\right]\left(\varepsilon_t^2-\sigma^2\right)=\sigma^2+\lambda\left(L\right)\left(\varepsilon_t^2-\sigma^2\right). \tag{18}$$

ここで，p＝q＝1 のとき，(18)が正である十分条件は $\sigma^2>0$ かつ $0\leq\phi_1\leq\beta_1\leq\theta\leq1$ であることを Chung〔43〕が示している。さらに，$\phi_1=0$ のときには FIGARCH (1, d, 0) モデルとなり，(19)で表現できる。

$$\phi\left(L\right)\left(1-L\right)^d\left(\varepsilon_t^2-\sigma^2\right)=\left[1-\beta\left(L\right)\right]\left(\varepsilon_{it}^2-\sigma_{it}^2\right),\qquad i=o,\,d\,. \tag{19}$$

Tse〔102〕によって考案された双曲線型 GARCH（HYGARCH: Hyperbolic GARCH）(p, d, q) モデルは Davidson〔48〕によって，さらに(20)と展開された。

$$\sigma_t^\delta=\omega\left[1-\beta\left(L\right)\right]^{-1}+\left[1-\left\{1-\beta\left(L\right)\right\}^{-1}\phi\left(L\right)\left(1+\alpha\left\{\left(1-L\right)^d\right\}\right)\right]\varepsilon_t^2=\omega^*+\lambda\left(L\right)\varepsilon_t^2. \tag{20}$$

ここで，$\alpha<1$ のとき(20)は定常過程となる。

その他の GARCH モデルとして，Allen *et al.*〔14〕が展開した RV-HAR(3) (Heterogeneous Autoregressive) モデルと非対称効果 (AE: Asymmetirc Effects)-GARCH(1, 1) モデル，Corsi and Reno〔45〕による HAR(3)-GARCH(1, 1) モデルがある[22]。また，Allen *et al.*〔15〕は RV-HAR(3) モデルと AE-VL(3) モデル[23]，Dufour *et al.*〔52〕は r_t と $\ln\left(RV_t\right)$ と $\ln\left(IV_t\right)$ の 3 変量 VAR(1) モデルを展開している。ただし，IV_t は時点 t でのインプライド・ボラティリティを表してい

表 1B. 夜間変化率の ARFIMAX$(1,\zeta,1)$–FIAPARCH$(1,\delta,1)$[(a)]/FIEGARCH$(1,\theta,1)$[(b)]–Jump–Mean モデル

$$\begin{cases}(1-L)^{\zeta}\left(r_{ot}-c_0-c_1D_t-c_2r_{dt-1}-\lambda\sigma_{ot}^2\right)=\varepsilon_{ot},\\ \sigma_t^{\delta}\equiv E\left[\varepsilon_t^{\delta}\middle|\Omega_{t-1}\right]=\omega_0+\omega_1RJ_{dt-1}+\left\{1-\left(1-\beta_1\right)^{-1}\phi_1\left(1-L\right)^{\theta}\right\}\left(\left|\varepsilon_t\right|-\gamma\varepsilon_t\right)^{\delta},\end{cases}$$

$$\begin{cases}(1-L)^{\zeta}\left(r_{ot}-c_0-c_1D_t-c_2r_{dt-1}-\lambda\sigma_t^2\right)=z_t\sigma_{ot},\\ \ln\sigma_t^2\equiv\ln\left(E\left[\varepsilon_t^2\middle|\Omega_{t-1}\right]\right)=\omega_0+\omega_1\ln\left(RJ_{dt-1}+1\right)+\phi_1^{-1}\left(1-L\right)^{-\theta}\left(1+\beta_1\right)\left\{\gamma_1z_t+\gamma_2\left(\left|z_t\right|-E\left[\left|z_t\right|\right]\right)\right\},\end{cases}$$

$$D_t=\begin{cases}1 & \text{前の 2 日間が休場だったら,}\\ 0 & \text{その他.}\end{cases}$$

モデル	FIAPARCH$(1,\delta,1)$		FIEGARCH$(1,\theta,1)$
従属変数	r_{ot},σ_t^{δ}		$r_{ot},\ln\sigma_t^2$
モデル	BBM モデル	Chung モデル	
誤差項の分布	GED[(c)]	Skewed-Student	Normal[(d)]
c_0	0.016013** (0.0027)	0.012632* (0.0110)	0.012064 (0.1018)
c_1	0.014012 (0.0952)	0.019218* (0.0155)	0.018429 (0.0676)
c_2	0.020557** (0.0000)	0.019520** (0.0000)	0.023690** (0.0003)
λ	0.046189 (0.2734)	0.101295* (0.0108)	0.065229 (0.1662)
ζ	0.029015*[**] (0.0216) [0.0000]	0.026046*[**] (0.0264) [0.0000]	0.025869[**] (0.3306) [0.0000]
ω_0	0.000268 (0.5481)	0.009143* (0.0303)	−10.188724** (0.0000)
ω_1	0.013093 (0.6196)	−0.038845 (0.1623)	−0.492102** (0.0009)
ϕ_1	0.205666** (0.0000)	0.303071** (0.0001)	−0.544212** (0.0000)
β_1	0.749247** (0.0000)	0.489958** (0.0000)	−0.964786** (0.0000)
γ	0.092541* (0.0338)	0.211228** (0.0006)	
γ_1			−0.057103** (0.0005)
γ_2			0.219459** (0.0000)
δ	1.984595**〈**〉 (0.0000) 〈0.0000〉 {0.4485}	2.321182**〈**〉{**} (0.0000) 〈0.0000〉 {0.0033}	
θ	0.642052** (0.0000) [0.1641]	0.272961**[**] (0.0000) [0.0000]	0.157156**[**] (0.0000)
Log Likelihood	−1411.149	−1363.999	−1401.477
AIC	0.618389	0.5989138	0.6143223
Shibata の情報量	0.614576	0.5942322	0.6105091
Schwartz の情報量	0.613858	0.5935753	0.6097902
DF	2.185634 (0.0000)		
Asymmetry Coefficient		−0.130681** (0.0000)	
Tail Coefficient		100.000000** (0.0000)	

( )内は p 値を表し，[ ]は帰無仮説：回帰係数 > 0.5 に対する p 値を表し，〈 〉は帰無仮説：回帰係数 > 1 に対する p 値を表し，{ }は帰無仮説：回帰係数 > 2 に対する p 値を表し，**(*)は有意水準 1%(5%)でゼロ仮説検定を棄却されるものを表す。

(a) 2 次のモーメント式を書き換えると

$$\left(1-\beta_1\right)\left\{\omega_0+\left(\left|\varepsilon_t\right|-\gamma\varepsilon_t\right)^{\delta}-\sigma_t^{\delta}\right\}=\phi_1\left(1-L\right)^{d}\left(\left|\varepsilon_t\right|-\gamma\varepsilon_t\right)^{\delta}.$$

となる。

(b) ARCH-M モデルの有無による情報量は有るモデルが選択されるべきモデルとなった。2 次のモーメント式を書き換えると

$$\left(1-\beta_1\right)\left\{\omega_0+\omega_1 RJ_{t-1}+\left(\left|\varepsilon_t\right|-\gamma\varepsilon_t\right)^{\delta}-\sigma_t^{\delta}\right\}=\phi_1\left(1-L\right)^{d}\left(\left|\varepsilon_t\right|-\gamma\varepsilon_t\right)^{\delta}.$$

となる。

(c) 誤差項がスチューデントの t 分布あるいは Skewed-Student 分布に従うと仮定した場合には対数尤度は収束しなかった。

(d) 誤差項がスチューデントの t 分布，GED 分布あるいは Skewed-Student 分布に従うと仮定した場合には対数尤度は収束しなかった。

る。Chung〔43〕は ARFIMA-FIGARCH モデルを使ったシミュレーションを行っている。

5. 推　　定

本節では拙稿〔 8 〕の予備分析結果に基づき，モデルを同定する。その際，2 変量モデルを想定することもできるが予備分析結果から必ずしも夜間と日中の変化率は同じような変動モデルを示さず，また 2 変量モデルでの推定を行ったが，1 変量モデルと比べて，よりよい推定結果が得られなかったために，本稿では夜間と日中の変化率を別々の 1 変量モデルとして推定した。

まず，FIGARCH モデルと FIAPARCH モデルの推定に関しては Ballie *et al.*（BBM）〔20〕と Chung〔43〕による推定方法があるために，両推定法によって分析を行った。また，拙稿〔 8 〕の夜間・日中変化率の予備分析の正規性検定から，5 種類の検定では棄却されるが，3 種類の検定では棄却されなかったために，推定モデルの誤差項を正規分布，スチューデントの t 分布，一般化残差分布，あるいは Skewed-Student 分布に従う場合のモデルを想定した。

表 1 と表 2 には 1 次のモーメント式に条件付き分散 $\left(\sigma_{it}^2\right)$ を含む ARCH-in-Mean モデルで推定し，表 1B と表 2B のモデルはそれぞれ表 1A と表 2A の独立変数にジャンプ変数を加えたモデルである[24]。表 3 は独立・従属変数に変化率の 2 乗のモデルを使用した。

6. 結　　果

表 1A は拙稿〔 8 〕の予備分析結果と同様に，夜間変化率の ARCH-in-Mean の(6)の ARFI-MAX $(0,\zeta,0)$ 2 次のモーメント式にジャンプ項が無い 3 種類のモデルと表 1B は 2 次のモーメント式にジャンプ項が入る 3 種類のモデルの推定結果であり，表 1B の(9)の FIEGARCH $(1,\theta,1)$ モデルでは変化率の定常過程（$\zeta<0.5$）を持ち，残る 5 種類のモデルでの変化率は有意に長期定

表 2A. 日中変化率の FIAPARCH$(1,\delta,1)$/FIEGARCH$(1,\theta,1)$–Mean モデル

$$r_{dt} = c_0 + c_1 D_t + c_2 r_{ot} + \lambda\sigma_t^2 + \varepsilon_t,$$

$$\begin{cases}\sigma_t^{\delta} \equiv E\left[\varepsilon_t^{\delta}\middle|\Omega_{t-1}\right] = \omega + \left\{1-\left(1-\beta_1\right)^{-1}\phi_1\left(1-L\right)^{\theta}\right\}\left(\left|\varepsilon_{dt}\right| - \gamma\varepsilon_{dt}\right)^{\delta}, \\ \ln\sigma_t^2 \equiv \ln\left(E\left[\varepsilon_t^2\middle|\Omega_{t-1}\right]\right) = \omega + \phi_1^{-1}\left(1-L\right)^{-\theta}\left(1+\beta_1\right)\left\{\gamma_1 z_t + \gamma_2\left(\left|z_t\right| - E\left[\left|z_t\right|\right]\right)\right\},\end{cases}$$

$$D_t = \begin{cases}1 & \text{前の 2 日間が休場だったとき,} \\ 0 & \text{その他.}\end{cases}$$

モデル	FIAPARCH$(1,\delta,1)$		FIEGARCH$(1,\theta,1)$
従属変数	r_{dt},σ_t^{δ}		$r_{dt},\ln\sigma_t^2$
モデル	BBM モデル	Chung モデル	
誤差項の分布	Skewed-Student	Skewed-Student	Skewed-Student[(b)]
c_0	-0.100088^{**} (0.0001)	-0.089473^{**} (0.0002)	-0.110733^{**} (0.0000)
c_1	-0.072099^{*} (0.0222)	-0.071388^{*} (0.0248)	-0.073104^{*} (0.0287)
c_2	0.553684^{**} (0.0000)	0.551423^{**} (0.0000)	0.554654^{**} (0.0000)
λ	0.048588^{*} (0.0397)	0.040054 (0.0723)	0.061191^{*} (0.0165)
ω	0.068439^{*} (0.0141)	1.054022^{**} (0.0060)	-4.368242^{**} (0.0000)
ϕ_1	0.232131^{**} (0.0000)	0.212824^{*} (0.0263)	-0.048894 (0.7761)
β_1	0.602552^{**} (0.0000)	0.461222^{**} (0.0007)	0.969051^{**} (0.0000)
γ	0.390491^{**} (0.0000)	0.365481^{**} (0.0000)	
γ_1			-0.079269^{**} (0.0000)
γ_2			0.176022^{**} (0.0000)
δ	$1.457756^{**\langle **\rangle\{**\}}$ (0.0000) ⟨0.0000⟩ {0.0019}	$1.794572^{**\langle **\rangle\{**\}}$ (0.0000) ⟨0.0000⟩ {0.0067}	
θ	0.468920^{**} (0.0002) [0.8077]	$0.337529^{**[**]}$ (0.0000) [0.0030]	$0.006877^{[**]}$ (0.35345)
Log Likelihood	−6345.376	−6347.034	−6341.146
AIC	2.7615097		2.75820495
Shibata の情報量	2.7576965		2.755260891
Schwartz の情報量	2.7569776		2.754469776
Asymmetry Coefficient	−0.014871 (0.4621)	−0.013088 (0.5132)	
Tail Coefficient	6.540119^{**} (0.0000)	6.648961 (0.0000)	

(　) 内は p 値を表し，[　] は帰無仮説：回帰係数 > 0.5 に対する p 値を表し，〈　〉は帰無仮説：回帰係数 > 1 に対する p 値を表し，{　} は帰無仮説：回帰係数 > 2 に対する p 値を表し，**(*) は有意水準 1% (5%) でゼロ仮説検定を棄却されるものを表す。

(a)　2 次のモーメント式を書き換えると

$$\left(1-\beta_1\right)\left\{\omega + \left(\left|\varepsilon_t\right| - \gamma\varepsilon_t\right)^{\delta} - \sigma_t^{\delta}\right\} = \phi_1\left(1-L\right)^{d}\left(\left|\varepsilon_t\right| - \gamma\varepsilon_t\right)^{\delta}.$$

となる。

(b)　誤差項がスチューデントの t 分布，GED 分布あるいは Skewed-Student 分布に従うと仮定した場合には対数尤度は収束しなかった。

常記憶性（$0<\zeta<0.5$）を有し，ジャンプ項の有無に拘らず(16)の FIAPARCH$(1,\zeta,1)$-Chung モデルでは変化率の有意な Mean 効果（λ）が存在する。また，変化率のボラティリティはジャンプ項の有無に拘らず FIAPARCH$(1,\zeta,1)$-Chung モデルでは長期定常記憶性（$0<\theta<0.5$）が有意に存在する一方で，ジャンプ項の有無に拘らず FIAPARCH$(1,\theta,1)$-BBM モデルでは非定常過程（$\theta>0.5$）の可能性が残る。さらに，ジャンプ項の有無に拘らず，すべての FIAPARCH$(1, \theta, 1)$ モデルからは有意水準 5% でボラティリティ変動の非対称性（γ）が存在する。また，表 1B からジャンプ項（ω_1）は FIEGARCH$(1, \theta, 1)$ モデルだけが有意水準 1% でゼロ仮説検定を棄却した。最後に，ジャンプ項の有無に拘らず FIAPARCH$(1,\zeta,1)$-Chung モデルでは変化率の 2 次より大きいモーメントモデル（$\delta>2$）が有意であったが，BBM モデルでは変化率の 2 次未満のモーメントモデル（$0<\delta<2$）の可能性が残った。

表 2A は日中変化率の 2 次のモーメント式にジャンプ項が無い 3 種類のモデルと表 2B は 2 次のモーメント式にジャンプ項が有る 3 種類のモデルの推定結果であり，夜間変化率モデルと比較すると日中変化率は長期記憶性を示す ζ のパラメータが存在しないが，表 2B の Mean 効果（λ）とジャンプ項（ω_1）は有意水準 1% でゼロ仮説検定を棄却する。表 2A の変化率のボラティリティは FIAPARCH$(1,\zeta,1)$-Chung モデルでは長期定常記憶性（$0<\theta<0.5$）が有意に存在する一方で，BBM〔20〕による FIAPARCH$(1,\theta,1)$ モデルでは定常過程あるいは非定常過程の判別は不可能であった。また，表 2B の変化率のボラティリティは FIAPARCH$(1,\zeta,1)$-BBM モデルでは長期定常記憶性（$0<\theta<0.5$）が有意に存在する一方で，FIAPARCH$(1,\theta,1)$-Chung モデルでは非定常過程（$\theta\geq 0.5$）にある。さらに，ジャンプ項の有無に拘らず，すべての FIAPARCH$(1, \theta,1)$ モデルからは有意水準 1% でボラティリティ変動の非対称性（γ）が存在し，θ のゼロ仮説検定が有意に棄却されなかったために，FIEGARCH$(1,\theta,1)$ モデルからは負のボラティリティの符号効果（γ_1）と正のボラティリティの規模効果（γ_2）が有意水準 1% で存在した。最後に，ジャンプ項の無い FIAPARCH$(1,\zeta,1)$ モデルでは変化率の 2 次より大きいモーメントモデル（$\delta>2$）が有意であったが，ジャンプ項の有る FIAPARCH$(1,\zeta,1)$ モデルでは変化率の 1 次より小さいモーメントモデル（$0<\delta<1$）が有意であった。

最後に，表 3 でジャンプ項付きの夜間・日中変化率を 2 乗した変数をそれぞれ従属変数として分散と見なした 2 次のモーメントの ARFIMAX$(0,\zeta,0)$-Jump モデルを考察する。休日ダミー変数と 1 期前の変数が負の場合に 1 をとるダミー変数（負の変化率ダミー変数と呼ぶことにする）と 1 期前の(4)のジャンプ変数を独立変数とした ARFIMA モデルを想定する。そのとき，夜間変化率の分散は 1 期前の日中変化率が負であったときのみの日中変化率の分散からの影響は有意ではなく，その他の夜間変化率の分散モデルと日中変化率の分散モデルの回帰係数は有意に正であった。そして，すべてのモデルで長期定常記憶性は有意であった。このことは表 2 の夜間変化率の 2 次のモーメントの長期記憶性が有意に存在したことと整合的であったが，日中変化率の 2 次のモーメントの長期記憶性が有意ではなかったことに反していた。

表 2B. 日中変化率の FIAPARCH$(1,\delta,1)$[(a)]/FIEGARCH$(1,\theta,1)$[(b)]–Jump–Mean モデル

$$\begin{cases} r_{dt} = c_0 + c_1 D_t + c_2 r_{ot} + \lambda\sigma_t^2 + \varepsilon_t, \\ \sigma_t^\delta \equiv E\left[\varepsilon_t^\delta \middle| \Omega_{t-1}\right] = \omega_0 + \omega_1 RJ_{ot} + \left[1-\left(1-\beta_1\right)^{-1}\phi_1\left(1-L\right)^\theta\right]\left(\left|\varepsilon_t\right| - \gamma\varepsilon_t\right)^\delta, \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_{dt} = c_0 + c_1 D_t + c_2 r_{ot} + \lambda\sigma_t^2 + z_t\sigma_t, \\ \ln\sigma_t^2 \equiv \ln\left(E\left[\varepsilon_t^2 \middle| \Omega_{t-1}\right]\right) = \omega_0 + \omega_1 \ln\left(RJ_{ot}+1\right) + \phi_1^{-1}\left(1-L\right)^{-\theta}\left(1+\beta_1\right)\left(\gamma_1 z_t + \gamma_2\left(\left|z_t\right| - E\left[\left|z_t\right|\right]\right)\right), \end{cases}$$

$$D_t = \begin{cases} 1 & \text{前の 2 日間が休場だったら}, \\ 0 & \text{その他}. \end{cases}$$

モデル	FIAPARCH$(1,\delta,1)$		FIEGARCH$(1,\theta,1)$
従属変数	r_{dt}, σ_t^δ		$r_{dt}, \ln\sigma_t^2$
モデル	BBM モデル	Chung モデル	
誤差項の分布	Normal[(c)]	GED[(d)]	GED[(d)]
c_0	-0.017529^{*} (0.0174)	-0.007435^{*} (0.0249)	-0.039786 (0.0013)
c_1	-0.015411 (0.2468)	-0.008243 (0.2249)	-0.071187 (0.0061)
c_2	0.149668^{**} (0.0000)	0.009115 (0.2622)	0.394929 (0.0000)
λ	-0.010858 (0.0529)	0.004518 (0.2621)	0.0000256 (0.0001)
ω_{d0}	-0.017341 (0.0582)	4.520065 (0.1472)	-6.907975 (0.0000)
ω_1	1.781973^{**} (0.0000)	0.579965^{**} (0.0000)	0.403697 (0.0000)
ϕ_1	0.455057^{**} (0.0000)	0.290900 (0.1097)	-0.640943 (0.0000)
β_1	-0.000185 (0.9721)	0.214913 (0.1209)	0.980329 (0.0000)
γ	0.054426^{**} (0.0028)	0.021733^{*} (0.0124)	
γ_1			0.337529 (0.0000)
γ_2			0.435385 (0.0000)
δ	2.009105^{**} (0.0000) ⟨0.17305⟩ {0.4313}	$1.932809^{**[*]}$ (0.0000) ⟨0.0000⟩ {0.0459}	
θ	$0.012408^{**[**]}$ (0.0049) [0.0000]	$0.896313^{**[**]}$ (0.0000) [0.0000]	-0.000882 (0.9586)
Log Likelihood	-5125.396	-4892.090	-5844.074
AIC	2.229339	2.128511	2.541699
Shibata の情報量	2.226396	2.125135	2.538322
Schwartz の情報量	2.225605	2.124381	2.537569

( )内は p 値を表し，[ ]は帰無仮説：回帰係数 > 0.5 に対する p 値を表し，〈 〉は帰無仮説：回帰係数 > 1 に対する p 値を表し，{ }は帰無仮説：回帰係数 > 2 に対する p 値を表し，**(*)は有意水準 1%(5%)でゼロ仮説検定を棄却されるものを表す。

(a) 2 次のモーメント式を書き換えると

$$\left(1-\beta_1\right)\left(\omega_0 + \left(\left|\varepsilon_t\right| - \gamma\varepsilon_t\right)^\delta - \sigma_t^\delta\right) = \phi_1\left(1-L\right)^d\left(\left|\varepsilon_t\right| - \gamma\varepsilon_t\right)^\delta.$$

となる。

(b) ARCH-in-Mean モデルの有無による情報量は有るモデルが選択されるべきモデルとなった。2 次のモーメント式を書き換えると

$$\left(1-\beta_1\right)\left(\omega_0 + \omega_1 RJ_{ot} + \left(\left|\varepsilon_t\right| - \gamma\varepsilon_t\right)^\delta - \sigma_t^\delta\right) = \phi_1\left(1-L\right)^d\left(\left|\varepsilon_t\right| - \gamma\varepsilon_t\right)^\delta.$$

となる。

(c) 誤差項がスチューデントの t 分布，GED 分布あるいは Skewed-Student 分布に従うと仮定した場合には対数尤度は収束しなかった。

(d) 誤差項がスチューデントの t 分布あるいは Skewed-Student 分布に従うと仮定した場合には対数尤度は収束しなかった。

7. おわりに

本稿では，金融派生商品およびリアルオプション理論の発展によって，ますます本源的資産のボラティリティの測定が重要となってきている。理論の裏打ちもあって，実証分析の側面でも様々なモデルが展開されてきた。資産の収益率（変化率）のボラティリティ・クラスタリングやボラティリティ変動の非対称性やボラティリティ変動の長期記憶性といったボラティリティの特徴を有する 2 次のモーメントを説明・被説明変数とする ARFIMA(X) モデルや (G)ARCH 族モデルといったボラティリティ変動モデルが展開されてきた。

さらに，データとしてはティック・データや 1 分・5 分刻みといった高頻度データを使用した実証分析がポピュラーになってきた。しかし，本稿では無料の実証データ，すなわち四本値を使用して分析を行うことにした。その理由は高頻度データを使用したとしても市場が開いていない時間帯の変化率（終値から始値）と市場が開いている時間帯の変化率（始値から終値）は根本的に異なるかもしれず，夜間変化率を求めるために日中変化率を定数倍して，日次変化率の試算を行っても，日次変化率そのものを得ることができないかもしれないと考えるからである。

本稿では，拙稿〔8〕の予備分析結果と同様に，夜間変化率に ARCH-in-Mean 項を加えたモデルと変化率の長期記憶性を検証した。その際，(6)の ARFIMAX モデルで推定し，変化率のボラティリティ変動モデルには変化率のボラティリティの長期記憶性とボラティリティ・クラスタリングとボラティリティ変動の非対称性を検証するために，FIAPARCH モデルあるいは FIEGARCH モデルにジャンプ項を含めるか否かで推定した。そして，最後に，独立・従属変数にジャンプ項を持つ変化率の 2 乗のモデルを使用した。また，推定モデルの誤差項を正規分布，スチューデントの t 分布，GED，あるいは Skewed-Student 分布に従う場合のモデルを想定した。

表 1 と表 2 の推定結果から，対数尤度，AIC，Shibata と Schwartz の情報量，さらにジャンプ項のゼロ仮説検定の棄却の有無から判断すると，夜間変化率モデルでは表 1A のジャンプ項の無い ARFIMAX$(0,\zeta,0)$-FIAPARCH$(1,\zeta,1)$-Chung モデル，日中変化率モデルではジャンプ項の入る FIAPARCH$(1,\zeta,1)$-Chung モデルで同定することが適当である。その結果，夜間変化率とそのボラティリティの両方に長期定常記憶性（$0<\zeta, \theta<0.5$）が存在し，ボラティリティ変動の非対称性（γ）が存在し，Mean 効果（λ）を有し，2 次より大きいモーメントモデル（$\delta>2$）が有意であった。また，日中変化率には長期記憶性が存在せず，そのボラティリティは非定常（$\theta>0.5$）であり，ボラティリティ変動の非対称性（γ）が存在し，ジャンプ項（ω_1）のゼロ仮説検定が

表 3. 夜間 / 日中変化率の 2 次のモーメントの ARFIMAX$(1,\zeta,1)$–Jump モデル[(a)]

$$\left(1-L\right)^{\zeta}\left[r_{ot}^{2}-c_{0}-c_{1}D_{t}-\left(c_{2}+c_{3}D_{2t-1}\right)r_{dt-1}^{2}-c_{4}RJ_{dt-1}\right]=\varepsilon_{dt},$$
$$\left(1-L\right)^{\zeta}\left[r_{dt}^{2}-c_{0}-c_{1}D_{t}-\left(c_{2}+c_{3}D_{3t}\right)r_{ot}^{2}-c_{4}RJ_{ot}\right]=\varepsilon_{ot},$$
$$D_{1t}=\begin{cases}1 & \text{前の 2 日間が休場だったら,}\\ 0 & \text{その他,}\end{cases}$$
$$D_{2t}=\begin{cases}1 & if \quad r_{dt}<0,\\ 0 & \text{その他,}\end{cases}\qquad D_{3t}=\begin{cases}1 & if \quad r_{ot}<0,\\ 0 & \text{その他.}\end{cases}$$

従属変数	r_{ot}^{2}		r_{dt}^{2}	
推定方法	Maximum likelihood	Starting Values only	Non-linear Least Squares	Starting Values only
c_0	0.223525** (0.000)	0.166866** (0.000)	0.505765** (0.001)	0.359450** (0.024)
c_1	0.0382215** (0.000)	0.0420969** (0.000)	0.242058** (0.001)	0.188148* (0.012)
c_2	−0.00178759 (0.274)	0.00832394** (0.000)	0.940662** (0.000)	1.27697** (0.000)
c_3	0.00611572** (0.007)	0.0107214** (0.000)	−0.565976** (0.000)	−0.493760** (0.001)
c_4	−0.188405** (0.000)	0.231670** (0.000)	1.24361** (0.000)	1.34385** (0.000)
ζ	0.229481**[**] (0.000) [0.0000]	0.182268**[**] (0.000) [0.0000]	0.189601**[**] (0.000) [0.0000]	0.193187**[**] (0.000) [0.0000]
Log Likelihood	−1369.41656	1.08105184	−10322.6079	−0.829134278
AIC	0.5976624	0.0025707	4.485366	0.0033995
Shibata の情報量	0.5964549	0.0013628	4.4841584	0.002192
Schwartz の情報量	0.5954679	0.0003756	4.4831714	0.001205

( )内と [ ]内は p 値を表し，**(*)は有意水準 1%(5%) でゼロ仮説検定を棄却されるものを表す。

(a)　ARFIMAX$(0,\zeta,0)$ モデルは以下の式に書き直すことができる。

$$r_{ot}^{2}=c_{0}+c_{1}D_{t}+\left(c_{2}+c_{3}D_{2t-1}\right)r_{dt-1}^{2}+c_{4}RJ_{dt-1}+\left(1-L\right)^{-\zeta}\varepsilon_{ot},$$
$$r_{dt}^{2}=c_{0}+c_{1}D_{t}+\left(c_{2}+c_{3}D_{3t}\right)r_{ot}^{2}+c_{4}RJ_{ot}+\left(1-L\right)^{-\zeta}\varepsilon_{dt}.$$

有意水準 1% で棄却され，2 次より大きいモーメントモデル（$\delta>2$）が有意であった。

表 3 でジャンプ項付きの夜間・日中変化率を 2 乗した変数をそれぞれ従属変数として分散と見なした 2 次のモーメントの ARFIMAX$(0,\zeta,0)$-Jump モデルを推定した結果，表 1 と表 2 と同様に，ボラティリティ変動の非対称性（c_3）のゼロ仮説検定が有意水準 1% で棄却された。一方，表 1 と表 2 に反してすべてのモデルで，ジャンプ項（c_4）のゼロ仮説検定は有意水準 1% で棄却し，長期定常記憶性（$0<\theta<0.5$）が存在した。

〔注〕

1）ボラティリティ変動の非対称性の初期の分析には Cambell and Hentschel〔40〕がある。

2）四本値を使ったボラティリティの分析には Yang and Zhang〔103〕と Shu and Zhang〔97〕がある。

3）マイクロストラクチャー・ノイズとの関係で Zhang *et al.*〔106〕と Aït-Sahalia *et al.*〔12〕は 2 時点での RV，Zhang〔105〕は多期間での RV との関係を明らかにし，Diebold〔50〕はマイクロストラクチャー・ノイズと（効率的価格（efficient price）や真の価格（true price）のような）潜在価格（latent price）の関係から RV を求めている。また，Pagel *et al.*〔91〕は 3 種類の推定量，イントラディ収益率の平方和（SSR: Sum of

Squared intra-day Returns）推定量とベクトル自己回帰不均一分散の整合的自己相関（VARHAC: Vector Autoregressive Heteroscedastic Autocorrelation Cosistent）推定量と Andersen *et al.*〔18〕による推定量の比較分析を行い，Andersen and Jones〔19〕は 2 種類の為替レートの変化率の RV を使って相関と長期記憶性を検証している。さらに，Alizadeh *et al.*〔13〕はレンジ（高値と安値の差）による SV モデルを分析し，Marquering and Verbeek〔86〕は超過変化率の正負かつ予測ボラティリティと定数の大小関係にモンテカルロ・シミュレーションを使って検定を行っている。

4） Barndorff-Nielsen and Shephard〔23〕と Bandi and Russel〔21〕は多変量の高頻度の実現した共分散（Realized Covariance）を分析している。Barndorff-Nielsen and Shephard〔23〕による BV_t は $\pi\sum_{i=2}^{M}\left|r_{t,i}\right|\left|r_{t,i-1}\right|\Big/2$ である。このとき，ジャンプ過程が有限であれば，$\operatorname*{plim}_{M\to\infty} BV_t = \int_{t-1}^{t}\sigma^2\left(s\right)ds$ となる。本稿では，任意の 1 日の変化率は夜間変化率と日中変化率から構成されているので，M＝2 となる。

また，Bandi and Russel〔22〕と Hansen and Lunde〔72〕と Behzadnejad〔27〕は実現した分散（Realized Variance）と最適なデータ間隔の抽出を考察している。

5） Eraker〔59〕によれば，以下の 2 種類のジャンプ過程による分析を行っている。一つは

$$dp_t\big/p_t = \mu dt + \sqrt{\sigma_t}dW_{1t} + \kappa_{1t}dq_{1t}, \qquad d\sigma_t = \beta\left(\theta - \sigma_t\right)dt + \gamma\sqrt{\sigma_t}dW_{2t} + \kappa_{2t}dq_{2t}\ .$$

である。ここで，β，γ，θ，μ，$\kappa_{it}\ (i=1,2)$ はパラメータ，W_1 と W_2 は標準ブラウン運動，$corr(dW_1, dW_2)=\rho$ はレバレッジ相関係数，dq_{it} は定数のジャンプ強度 λ_i を持ち，ランダムなジャンプの大きさは $N\left(0,\sigma_i^2\right)$ の分布に従うポワソン過程を表す。もう一つは，

$$dp_t\big/p_t = \left(\alpha - \mu^*\right)dt + \sqrt{\sigma_t}dW_1\left(Q_t\right) + \kappa_{1t}dq_{1t}, \quad d\sigma_t = \left(\beta\left(\theta - \sigma_t\right) + \eta\sigma_t\right)dt + \gamma\sqrt{\sigma_t}dW_2\left(Q_t\right) + \kappa_{2t}dq_{2t},$$

$$dW_i\left(Q_t\right) = \varphi_i dt + dW_{it}\ .$$

である。ここで，α はパラメータ，ボラティリティは $\beta-\eta$ の率で引き戻され，η はボラティリティ過程のショックにともなうリスクプレミアムパラメータを表す。

6） Laurent〔84〕（pp. 35–37）によれば，(5) の z_t が標準正規分布に従う場合の対数尤度関数 L_{norm} は次式となる。

$$L_{norm} = -\sum_{t=1}^{T}\left[\log\left(2\pi\right) + \log\left(\sigma_i^2\right) + z_t^2\right]\Big/2\ .$$

ここで，T は標本の大きさを表す。また，スチューデントの t 分布に従う場合の対数尤度関数 L_{stud} は次式となる。

$$L_{stud} = T\left\{\log\Gamma\left(\left(\nu+1\right)/2\right) - \log\Gamma\left(\nu/2\right) - \log\left[\pi\left(\nu-2\right)\right]\Big/2\right\} - \sum_{t=1}^{T}\left[\log\left(\sigma_{it}^2\right) + \left(1+\nu\right)\log\left(1 + z_t^2\big/\left(\nu-2\right)\right)\right]\Big/2\ .$$

ここで，ν は自由度 $(2<\nu\leq\infty)$ であり，$\Gamma(\ )$ はガンマ関数である。正規化されたランダム変数の一般化誤差分布（GED: Generalized Error Distribution）の対数尤度関数 L_{GED} は次式である。

$$L_{GED} = \sum_{t=1}^{T}\left[\log\left(\nu/\lambda_\nu\right) - 0.5\left|\nu/\lambda_\nu\right| - \left(1+1/\nu\right)\log\left(2\right) - \log\Gamma\left(1/\nu\right) - 0.5\log\left(\sigma_{it}^2\right)\right], \quad \lambda_\nu \equiv \sqrt{\Gamma\left(1/\nu\right)2^{-2/\nu}\Big/\Gamma\left(3/\nu\right)}\ .$$

ここで，$0<\nu<\infty$ である。L_{stud} と L_{GED} は誤差項の分布の裾が厚いことと，ボラティリティの非対称性を考慮したことに起因している。

さらに，GARCH モデルのフレームワークの下で，Fernandez and Steel〔60〕により考案され，Lambert and Laurent〔82〕によって適用，拡張された Skewed-Student の対数尤度関数 L_{skSt} は次式である。

$$L_{skSt} = T\left\{\log\Gamma\left(\left(\nu+1\right)/2\right) - \log\Gamma\left(\nu/2\right) - \log\left[\pi\left(\nu-2\right)\right]\Big/2 + \log\left(2\big/\left(\xi + 1/\xi\right)\right) + \log\left(s\right)\right\}$$
$$- \sum_{t=1}^{T}\left[\log\left(\sigma_{it}^2\right) + \left(1+\nu\right)\log\left(1 + \left(s\varphi_t + m\right)^2\xi^{-2I_t}\big/\left(\nu-2\right)\right)\right]\Big/2\ .$$

ただし，下式とする。

$$I_t = \begin{cases} 1 & if \quad \varphi_t \geq -m/s \\ -1 & if \quad \varphi_t < m/s \end{cases}, \quad m = \frac{\Gamma\left(\left(\nu+1\right)/2\right)\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu/2\right)}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right), \quad s = \sqrt{\xi^2 + \frac{1}{\xi^2} - 1 - m^2}\ .$$

ここで，ξ は非対称性のパラメータであり，ν は分布の自由度を表す。

7）（6）の x_{jt} がないモデルは ARFIMA モデルと呼ばれる。Bos *et al.*〔36〕は戦後米国のインフレーションの月次データに ARFIMAX モデルで分析している。ただし，長期記憶性に関する問題点を Souza〔99〕は論じている。

8）ARMA モデルによる予測研究の一つは Granger and Ramanathan〔71〕である。

9）最尤法の推定は柴田〔10〕の補論 A を参照されたい。推定法は，最尤法（Sowell〔98〕），近似最尤法（Beran〔28〕），2 段階推定法（Geweke and Porter-Hudak〔62〕と Janacek〔78〕）などがある。Goldman *et al.*〔66〕は閾値 ARMA（Threshold ARMA: TARMA）モデルを使用して RV を計測している。

10）これは，Dufour *et al.*〔52〕による。

11）Engle and Gallo〔55〕は ARCH 型モデルを使用して VIX 指数のボラティリティの予測比較を行っている。

SV モデルを使って，Alizadeh and Jones〔13〕と Brandt and Jones〔37〕はレンジによるボラティリティ計測を行い，da Silva and Robinson〔49〕は長期記憶性のシミュレーションを行い，Britten-Jones and Neuberger〔38〕はオプションプライシングを行っている。Berg *et al.*〔29〕はジャンプ効果とレバレッジ効果などを示す SV モデルの逸脱情報基準（DIC: Deviance Information Criterion）を使用して比較分析を行っている。

Koopman *et al.*〔80〕と Kruse〔81〕は下式の SV モデルで実証分析を行っている。

$$r_t = \mu + \sigma_t z_t \quad z_t \overset{i.i.d.}{\sim} N\left(0,1\right), \quad \sigma_t^2 = \sigma_*^2 \exp\left(h_t\right), \quad h_t = \beta h_{t-1} + \sigma_\eta \eta_t \quad \eta_t \overset{i.i.d.}{\sim} N\left(0,1\right).$$

ただし，β と σ_η はパラメータを表し，μ を固定して，σ_*^2 をスケーリング要因（scaling factor）とする方法である。もう一つの方法としては，初期値として $\sigma_*^2 = 1$ に設定して，対数型 AR 過程を持ち込む方法である。また，多変量 SV モデルの分析としては Harvey *et al.*〔73〕がある。

12）GARCH モデルを使用したボラティリティ予測の早い時期での研究には Andersen and Bollerslev〔16〕がある。Andersen and Bollerslev〔17〕は MA(1)-GARCH(1, 1) モデルを使って，S&P500 先物価格と為替レートの変化率の分析，Martens and Zein〔88〕は GARCH モデルを使ったボラティリティの時系列予測とインプライド・ボラティリティの比較を行っている。他に Bollerslev and Ghysels〔35〕は期間 ARCH（P-ARCH），P-GARCH を使用して為替レートの変化率を分析している。また，本節で説明するモデル以外に Talor/Schwert モデル，A-GARCH モデル，NA-GARCH モデル，V-GARCH モデル，NGARCH モデル，GQ-ARCH モデル，H-GARCH モデル，Aug-GARCH などがある。

13）Laurent *et al.*〔85〕は Engle and Kroner〔56〕による BEKK-GARCH(1, 1)，Bollerslev〔32〕による一定の条件付き相関係数（CCC: Constant Conditonal Correlation）-GARCH(1, 1) モデル，Engle〔54〕による動的条件付き相関係数（DCC: Dynamic Condtional Corelation）-GARCH(1, 1) モデルを使用している。さらに，McAleer〔89〕は CCC-GARCH モデルと DCC-GARCH モデルと多変量 SV モデルを使って特徴を分析している。

14）（9）は

$$\phi\left(L\right)\left(1-L\right)^{\theta}\left\{\ln\left(\sigma_t^2\right) - \omega\right\} = \left[1 + \alpha\left(L\right)\right] g\left(z_t\right).$$

と書くこともできる。Nelson〔90〕によって考案された EGARCH（p,q）モデルは変化率とボラティリティの変動の関係が対称的であり，モデルは

$$\ln\left(\sigma_t^2\right) = \omega + \sum_{j=1}^{p} \phi_j \left\{\ln\left(\sigma_{t-j}^2\right) - \omega\right\} + \sum_{j=0}^{q} \alpha_j \left\{\gamma_1 z_{t-j} + \gamma_2 \left(\left|z_t\right| - E\left[\left|z_t\right|\right]\right)\right\}.$$

である。Pandey〔93〕はレンジを使用した EGARCH モデルによる分析を行っている。

もし上式のように説明変数が上式に含まれるなら，σ^2 を ε_t の無条件分散 $\left(\lim_{s\to\infty} Var\left(\varepsilon_{t+s}\right)\right)$ として，ω を $\ln\left(\sigma^2\right)$ で置き換え，説明変数 $\overline{x}_j\ (j=1,2,\cdots,n_3)$ があるときには $\ln\left(\sigma^2\right)-\sum_{j=1}^{n_2}\omega_j\overline{x}_j$ で置き換える。ただし，n_3 個の説明変数の定常条件の仮定下で，$\overline{x}_j$ は $x_{j,t}$ の標本平均を表す。

15）p＝1，q＝0 のときモデルは下式となり，渡部・佐々木〔11〕が使用している。

$$\begin{cases}\ln\left(\sigma_t^2\right)=\omega+\phi_1\left(\ln\left(\sigma_{t-1}^2\right)-\omega\right)+\left(\gamma_1+\alpha_1\right)\left|z_{t-1}\right|+\gamma_2 E\left(\left|z_{t-1}\right|\right) & if \quad z_{t-1}\geq 0,\\ \ln\left(\sigma_t^2\right)=\omega+\phi_1\left(\ln\left(\sigma_{t-1}^2\right)-\omega\right)+\left(\gamma_1-\alpha_1\right)\left|z_{t-1}\right|+\gamma_2 E\left(\left|z_{t-1}\right|\right) & その他.\end{cases}$$

16）（13）は GARCH タイプのモデルであるが，Ding *et al.*〔51〕は APARCH と呼んで，他の GARCH 型モデルとのパラメータ比較を行うことによって他のモデルが含まれることを示している。

AP（G）ARCH 式に説明変数 $\overline{x}_j\ (j=1,2,\cdots,n_3)$ が含まれるときには ω の代わりに

$$\sigma^\delta\left(1-\sum_{j=1}^{p}\beta_j-\sum_{j=1}^{q}\alpha_j\kappa\right)-\sum_{j=1}^{n_3}\omega_j\overline{x}_j$$

を置き換える。（13）の統計的性質は Karanasos and Kim〔79〕が論じている。

17）Bollerslev〔31〕によれば，尖度は $3\left\{1-\left(\alpha_1+\beta_1\right)^2\right\}\Big/\left\{1-\left(\alpha_1+\beta_1\right)^2-2\alpha_1^2\right\}>3$ であり，定常状態のとき 1 次の自己相関係数は $\rho_1=\alpha_1+\alpha_1^2\beta_1\Big/\left(1-2\alpha_1\beta_1-\beta_1^2\right)$，$k$ 次の自己相関係数は $\rho_k=\left(\alpha_1+\beta_1\right)^{k-1}\rho_1, k=2,3,\cdots$ である。

GARCH 式に説明変数 $\overline{x}_j\ (j=1,2,\cdots,n_3)$ が含まれるときには ω_j の代わりに

$$\sigma_i^2\left(1-\sum_{j=1}^{p}\beta_j-\sum_{j=1}^{q}\alpha_j\right)-\sum_{j=1}^{n_2}\omega_j\overline{x}_j$$

を置き換える。ただし，n_2 個の説明変数の定常条件の仮定下で，$\overline{x}_j$ は $x_{j,t}$ の標本平均であり，σ_i^2 は σ_{it}^2 の無条件分散 $\left(\lim_{s\to\infty}\sigma_{it+s}^2\right)$ を表す。

下式は Martens〔87〕，Koopman *et al.*〔80〕，と Grané and Veiga〔68〕による GARCH（1, 1）-RV モデルである。

$$\sigma_t^2=\omega+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2+\beta_1\sigma_{t-1}^2+\gamma_1 RV_{t-1}=\omega\Big/\left(1-\beta_1\right)+\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_1^j L^j\right)\left(\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2+\gamma_1 RV_{t-1}\right).$$

ここで，$\left\{\varepsilon_{t-l}^2\right\}$ と $\left\{RV_{t-1}\right\}$ のパラメータが同じ割合 β_1 で減衰していくことを示している。柴田〔1〕によれば，Blair *et al.*〔30〕は GARCH（2, 2）-RV モデルを下式の別型のモデルとして展開している。

$$\begin{aligned}\sigma_t^2&=\left(\omega+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2\right)\Big/\left(1-\beta_1 L\right)+\gamma_1 RV_{t-1}\Big/\left(1-\beta_2 L\right)\\&=\omega\Big/\left(1-\beta_1\right)+\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_1^j L^j\right)\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2+\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_2^j L^j\right)\gamma_1 RV_{t-1}.\end{aligned}$$

これを検証するために，上式の両辺に $\left(1-\beta_1 L\right)\left(1-\beta_2 L\right)$ を乗じて整理すると，下式になる。

$$\sigma_t^2=\omega^*+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2-\beta_2\alpha_1\varepsilon_{t-2}^2+\left(\beta_1+\beta_2\right)\sigma_{t-1}^2-\beta_1\beta_2\sigma_{t-2}^2+\gamma_1 RV_{t-1}+\gamma_1\beta_1 RV_{t-1}.$$

ここで，$\alpha^*=\left(1-\beta_2\right)\alpha_1$ である。このため，GARCH-RV モデルでは GARCH（1, 1）か GARCH（2, 2）が推定モデルとして選択されることが多いと柴田〔10〕が論じている。

18）Glosten *et al.*〔65〕により考案され，Grané and Veiga〔68〕，Illueca and Lafuente〔77〕，Goyal〔67〕が使用するモデルは下式である。

$$\sigma_t^2=\omega+\sum_{j=1}^{q}\left(\alpha_j\varepsilon_{t-j}^2+\gamma_j D_{t-j}^-\varepsilon_{t-j}^2\right)+\sum_{j=1}^{p}\beta_j\sigma_{t-j},\quad \omega>0,\alpha_j,\beta_j\geq 0,\quad D_{t-i}^-=\begin{cases}1 & if \quad \gamma_i<0,\\0 & その他.\end{cases}$$

このモデルでは誤差項が正規分布，スチューデントの t 分布あるいは GED の場合には $E\left[D_{t-i}^-\right]=0.5$，Skewed-Student 分布の場合には $E\left[D_{t-i}^-\right]=1\Big/\left(1+\xi^2\right)$ である。これによって，「ボラティリティの非対称

性がない」という帰無仮説を検定することは容易であり，$\gamma_1=\gamma_2=\cdots=\gamma_q=0$ のときにはボラティリティの対称性を意味している。

GJR 式に説明変数 $\overline{x}_j$ $(j=1,2,\cdots,n_3)$ が含まれるときには上式の ω の代わりに

$$\sigma^2\left(1-\sum\nolimits_{j=1}^{p}\beta_j-\sum\nolimits_{j=1}^{q}\left(\alpha_j-\gamma_j E\left[D_t^-\right]\right)\right)-\sum\nolimits_{j=1}^{n_2}\omega_j\overline{x}_j$$

で置き換えたモデルである。

19） Ding *et al.*〔51〕は z_t が正規分布に従う場合の定常条件を

$$\kappa_i=E\left[\left|z\right|-\gamma_i z\right]^{\delta}=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left(\left|x\right|-\gamma_j x\right)^{\delta}e^{x^2/2}\Big/\sqrt{2\pi}\right\}dx$$

として閉形式で導出している。Lambert and Laurent〔82〕は z_t が標準 Skewed-Student 分布に従う場合の定常条件を下式として閉形式で導いている。

$$\kappa=\left\{\xi^{-(1+\delta)}\left(1+\gamma\right)^{\delta}+\xi^{1+\delta}\left(1-\gamma\right)^{\delta}\right\}\Gamma\left(\left(\delta+1\right)/2\right)\Gamma\left(\left(\nu-\delta\right)/2\right)\left(\nu-2\right)^{(1+\delta)/2}\Big/\left\{\left(\xi+1/\xi\right)\sqrt{\left(\nu-2\right)\pi}\,\Gamma\left(\nu/2\right)\right\}.$$

ただし，スチューデントの t 分布の場合は $\xi=1$ である。GED の場合は下式として閉形式で導いている。

$$\kappa=\left\{\left(1+\gamma\right)^{\delta}+\left(1-\gamma\right)^{\delta}\right\}2^{(\delta-\nu)/\nu}\Gamma\left(\left(\delta+1\right)/\nu\right)\lambda_{\nu}^{\delta}\Big/\Gamma\left(1/\nu\right).$$

20） Kruse〔81〕は RV_t と ln RV_t による ARMA(2,1) モデルと ARFIMA(1,0,1) モデルと HAR(3) モデル，さらに誤差項が正規分布，GED あるいは Skewed-Student 分布に従う場合の GARCH 型モデル（EGARCH・FIGARCH・TGARCH・HYGARCH）と SV モデルを用いて分析を行っている。

21） FIGARCH モデルは IGARCH モデルと同様の「ナイフ･エッジの非定常（knife-edge-nonstationary)」クラスに属している。Conrad and Haag〔44〕は $p\leq 2$ の FIGARCH モデルでの条件付き分散の非負の必要十分条件を導出している。

22） さらに，Corsi *et al.*〔46〕は誤差項が標準化逆正規分布（standard NIG: standard Normal Inverse Gaussian）に従うよう仮定した場合の分析も行っている。

23） ここで，VL はボラティリティのボラティリティ（Volatility of Volatility）を表している。

24） ARFIMAX モデルで推定した，日中変化率モデルでは ζ がゼロ仮説検定を有意に棄却しなかったために，ARFIMAX モデルで同定しなかった。

〔参考文献〕

〔1〕 中川裕司，「2 変量 ARCH モデルによる日経平均株価指数・先物日次収益率の時系列分析（Time Series Analysis of Nikkei Index and Nikkei Index Futures Daily Returns by Bivariate ARCH Model)」，『南山論集』第 20 号，南山大学経済・経営研究科紀要，1992 年 3 月，pp. 19–42.

〔2〕 ————，「ARCH モデルによる日中・夜間収益率のボラティリティの推定（Estimates of the Conditional Volatility of the Open-Close and Close-Open Returns by ARCH)」，『日本経営数学会誌（Annual Report of Japan Society of Business Mathematics)』第 15 号（商業数学会誌改題通算 35 号），日本経営数学会，1993 年 5 月，pp. 11–20.

〔3〕 ————，「バブルによる日経指数・先物収益率の条件付きボラティリティの変化（A Change of Conditional Heteroskedastic Day-Time and Overnight Volatilities in the Nikkei Index and Nikkei Index Futures Markets after Bubble)」，『岐阜経済大学論集（鈴木和蔵教授記念号)』第 29 巻第 2 号，岐阜経済大学，1995 年 9 月，pp. 1–25.

〔4〕 ————，「Daily GARCH Effects versus Volume Effects in Nearby and Distant Nikkei Index Futures Markets」，『岐阜経済大学論集』第 29 巻第 3 号，岐阜経済大学，1995 年 12 月，pp. 31–61.

〔5〕 ————，「Intraday Futures Volume and GARCH Effects in Heteroskedastic Mixture Model」，『岐阜経済大学論集』第 29 巻第 4 号，1996 年 3 月，pp. 75–92.

〔6〕 ————，「2 変量 VAR(1)-GARCH(1,1) モデルによる n 期間収益率のボラティリティの計測（Prediction for Heteroskedastic Volatilities of Returns during n Periods in Bivariate VAR(1)-GARCH(1,1) Model)」，

『岐阜経済大学論集』第 30 巻第 1 号，岐阜経済大学，1996 年 6 月，pp. 37–64.

〔7〕 ————，「多期間収益率の時間依存型ボラティリティの導出——多変量 VAR-GARCH モデルのケース——（Maximum Likelihood Estimation for VARMA-GARCH Model—Analyzing Likelihood Equations—）」，『岐阜経済大学論集』第 30 巻第 2 号，岐阜経済大学，1996 年 9 月，pp. 41–63.

〔8〕 ————，「TOPIX の夜間・日中変化率の LM ARCH・独立性・正規性・ランダム･ウォーク仮説・長期記憶性検定（Statistics of LM ARCH, Independent, Normality, Random Walk Hypothesis, and Long Memories of Overnight and Daytime Relative Log Prices of TOPIX）」，『岐阜経済大学論集』第 44 巻第 3 号，岐阜経済大学，2011 年 8 月，pp. 1–12.

〔9〕 中川裕司・中山章宏・岡山将也，「VARMA-GARCH モデルの最尤推定法——解析編——（Maximum Likelihood Estimation of VARMA-GARCH Model—Analyzing Likelihood Equations—）」，『地域経済』第 23 集，岐阜経済大学，2004 年 3 月，pp. 75–82.

〔10〕 柴田舞，「高頻度データによるボラティリティの推定：Realized Volatility のサーベイと日本の株価指数および株価指数先物の実証分析」，日本銀行金融研究所ディスカッション･ペーパー･シリーズ，2007-J-14.

〔11〕 渡部敏明・佐々木浩二，「ARCH モデルと“Realized Volatility”によるボラティリティ予測とバリュー･アット･リスク」，『金融研究』，日本銀行金融研究所，2006 年 10 月，pp. 39–74.

〔12〕 Aït-Sahalia, Y., P. A. Mykland and L. Zhang, “Ultra High-Frequency Volatility Estimation with Deoendent Microstructure Noise,” 2009, Working paper.

〔13〕 Alizadeh, S. and C. S. Jones, “Bayesian Range-Based Estimation of Stochastic Volatility Models,” *Finance Research Letters,* 2005, Vol. 2, pp. 201–209.

〔14〕 Allen, D., M. McAlleer and M. Scharth, “Realized Volatility Uncertainty,” 2008, Working paper.

〔15〕 ————, “Pricing Optiuons by Simulation Using Realized Volatility,” *18th World IMACS/MODSIM Congress, Cairns, Australia,* 2009, No. 13–17, pp. 1479–1485.

〔16〕 Andersen, T. G. and T. Bollerslev, “Intraday Periodicity and Volatility Persistence in Financial Markets,” *Journal of Empirical Finance,* 1997, Vol. 4, No. 2–3, pp. 115–158.

〔17〕 ————, “Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecast,” *International Economic Review,* 1998, Vol. 39, No. 4, pp. 885–905.

〔18〕 Andersen, T. G., T. Bollerslev, F. X. Diebold and Ebens, H., “The Distribution of Realized Stock Return Volatility,” *Journal of Financial Economics,* 2001a, Vol. 61, No. 1, pp. 43–76.

〔19〕 ————, “The Distribution of Exchange Rate Volatility,” *Journal of American Statistical Association,* 2001b, Vol. 96, pp. 42–55.

〔20〕 Baillie, R. T., T. Bollerslev and H. O. Mikkelsen, “Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditionally Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics,* 1996, Vol. 74, No. 1, pp. 3–30.

〔21〕 Bandi, F. M. and J. R. Russel, “Microstructure Noise, Realized Variance, and Optimal Sampling,” 2005, Working paper.

〔22〕 ————, “Realized Covariation, Realized Beta, and Microstructure Noise,” 2005, Working paper.

〔23〕 Barndorff-Nielsen, O. E. and N. Shephard, “Econometric Analysis of Realized Covariation: High Frequency Based Covariance, Regression, and Correlation in Financial Economics,” *Econometrica,* 2004, Vol. 72, pp. 885–925.

〔24〕 Barndorff-Nielsen, O. E., S. Kinnebrock and N. Shephard, “Measuring Downside Risk—Realized Semivariance,” 2008, Working paper.

〔25〕 Barndorff-Nielsen, O. E., P. R. Hansen, A. Lunde and N Shephard, “Subsampling Realized Kernels,” 2006b, OFRC Working Papers Series, Oxford Financial Research Centre.

〔26〕 ————, “Designing Realized Kernels to Measure the Ex-Post Variation of Equity Prices in the Present of Noise,” *Econometrica,* 2008, Vol. 76, No. 6, pp. 1481–1536.

〔27〕 Behzadnejad, F., “Measuring and Forecasting the Daily Variance Based on High-Frequency Intraday and Electronic Data,” *Econometrica,* 2008, Vol. 76, No. 6, pp. 1481–1536,

〔28〕 Beran, J., *Statistics for Long-Memory Processes,* 1994, Chapman Hall, Florida.
〔29〕 Berg, A., R. Meyer and J. Yu, "Deviance Information Criterion for Comparing Stochastic Volatility Models," *Journal of Business & Economic Statistics,* 2004, Vol. 22, pp. 107–120.
〔30〕 Blair, B. J., S. H. Poon and S. J. Taylor, "Forecasting S & P 100 Volatility: the Incremental Information Content of Implied Volatilities and High-Frequency Index Returns," *Journal of Econometrics,* 2001, Vol. 105, pp. 5–26.
〔31〕 Bollerslev, T., "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics,* 1986, Vol. 31, No. 3, pp. 307–327.
〔32〕 ————, "Modeling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model," *Review of Economics and Statistics,* 1990, Vol. 17, pp. 45–56.
〔33〕 Bollerslev, T., and H. O. Mikkelsen, "Modeling and Pricing Long Memory in Stock Market Volatility," *Journal of Econometrics,* Vol. 73, No. 1, 1996, pp. 151–184.
〔34〕 Bollerslev, T., R. F. Engle and D. B. Nelson, "ARCH Models," in Engle, R. F. and D. McFadden, eds., *The Handbook of Econometrics Vol. 4,* 1994, Elsevier, pp. 2959–3038.
〔35〕 Bollerslev, T., and E. Ghysels "Periodic Autoregressive Conditional Heteroscedasticity," *Journal of Business & Economic Statistics,* 1996, Vol. 14, No. 2, pp. 139–151.
〔36〕 Bos, C. S., P. H. Frances and M. Ooms, "Inflation, Forecast Intervals and Long Memory Regression Models," *International Journal of Forecasting,* 2002, Vol. 18, pp. 243–264.
〔37〕 Brandt, M. W. and C. Jones, "Bayesian Range-Based Estimation of Stochastic Volatility Models," *Finance Research Letters,* 2005, Vol. 2, pp. 201–209.
〔38〕 Britten-Jones, M. and A. Neuberger, "Option Prices, Implied Price Process, and Stochastic Volatility," *Journal of Finance,* 2000, Vol. 55, No. 2, pp. 839–866.
〔39〕 Brockwell, P. J. and R. A. Davis, *Introduction to Time Series and Forecasting 2nd ed.,* Springer-Verlag, 2002, New York.
〔40〕 Cambell, J. Y. and L. Hentschel, "No News is Good News: A Asymmetric Model of Changing Volatility in Stock Returns," *Journal of Financial Economics,* 1992, Vol. 31, No. 3, pp. 281–318.
〔41〕 Chang, M. C. and D. A. Dickey, "Recognizing Overdifferenced Time Series," *Journal of Time Series Analysis,* 1994, Vol. 15, pp. 1–18.
〔42〕 Cheong, C. W., "Volatility in Malaysian Stock Market: An Empirical Study Using Fractionally Integrated Approach," *American Journal of Applied Sciences,* 2008, Vol. 5, No. 6, pp. 683–688.
〔43〕 Chung, C. F., "Estimating the Fractionally Integrated GARCH Model," 1999, Institute of Economics, Academia Sinica, Working Paper.
〔44〕 Conrad, C. and B. Haang, "Inequality Constraints in the Fractionally Integrated GARCH Model," *Journal of Financial Econometrics,* 2006, Vol. 4, pp. 413–449.
〔45〕 Corsi, F. and R. Reno, "HAR Volatility Modeling with Heterogeneous Leverage and Jumps," 2009, Working paper.
〔46〕 Corsi, F., D. Prino and R. Reno, "Threshold Bipower Variation and the Impact of Jumps on Volatility Forecasting," 2009, Working paper.
〔47〕 Czubala, W., "Euro and Co-movement of Jump Components in Realized Return Volatility," 2008, Working paper.
〔48〕 Davidson, J. "Moment and Memory Properties of Linear Conditional Heteroscedasticity Models, and a New Model," *Journal of Business and Economic Statistics,* 2004, Vol. 22, No. 1, pp. 16–29.
〔49〕 da Silva, A. G. and P. M. Robinson, "Finite Sample Performance in Cointegration Analysis of Nonlinear Time Series with Long Memory," *Econometric Reviews,* 2008, Vol. 27, No. 1–3, pp. 268–297.
〔50〕 Diebold F., "On Market Microstructure Noise and Realized Volatility," *Journal of Business and Economic Statistics,* 2006, Vol. 24, pp. 181–183.

〔51〕 Ding, Z., C. W. J. Granger and R. F. Engle, “A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model,” *Journal of Empirical Finance,* 1993, Vol. 1, No. 1, pp. 83–106.
〔52〕 Dufour, J. M., R. Garcia and A. Taamouti, “Measuring Causality between Volatility and Returns with High-Frequency Data,” 2008, Working paper.
〔53〕 Engle, R. F., “Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation,” *Econometrica,* 1982, Vol. 50, pp. 987–1007.
〔54〕 ————, “Dynamic Conditional Correlation — A Simple Class of Multivariate GARCH Models,” *Journal of Business and Economic Statistics,* 2002, Vol. 20, pp. 339–350.
〔55〕 Engle, R. F. and G. M. Gallo, “A Multiple Indicators Model for Volatility Using Intra-Daily Data,” *Journal of Econometrics,* 2006, Vol. 131, No. 1–2, pp. 3–27.
〔56〕 Engle, R. F. and K. F. Kroner, “Multivariate Simultaneous Generalized ARCHH,” *Econometric Theory,* 1995, Vol. 11, No. 1, pp. 122–150.
〔57〕 Engle, R. F., D. M. Lilien and R. P. Robbins, “Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model,” *Econometrica,* Vol. 55, 1987, pp. 391–407.
〔58〕 Engle, R. F. and Z. Sun, “When Is Noise Not Noise — A Microstructure Estimate of Realized Volatility,” 2007, NYU Working Paper No. FIN-07-047.
〔59〕 Eraker, B., “Do Stock Prices and Volatility Jump? Reconciling Evidence from Spot and Option Prices,” *Journal of Finance,* 2004, Vol. 59, No. 3, pp. 1367–1403.
〔60〕 Fernandez, C. and M. F. J. Stell, “On Bayesian Modeling of Fat Tails and Skewness,” *Journal of the American Statistical Association,* 1998, Vol. 93, No. 441, pp. 359–371.
〔61〕 Geweke, J., “Modeling the Persistence of Conditional Variances: A Comment,” *Econometric Reviews,* 1986, Vol. 5, pp. 57–61.
〔62〕 Geweke, J. and S. Porter-Hudak, “The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models,” *Journal of Time Series Analysis,* 1983, Vol. 4, pp. 221–238, in, Robinson, P. M., *Time Series with Long Memory,* Oxford University Press, pp. 119–137.
〔63〕 Giot, P. and S. Laurent, “Modeling Daily Value-at-Risk Using Realized Volatility and ARCH Type Models,” *Journal of Empirical Finance,* 2004, Vol. 11, No. 3, pp. 379–398.
〔64〕 Giot, P., Laurent, S. and M. Petitjean, “Trading Activity, Realized Volatility and Jumps,” 2009, Working paper.
〔65〕 Glosten, L. R., R. Jagannathan and D. E. Runkle, “On the Relation between the Expected Value and the Volatility of Nominal Excess Returns on Stocks,” *Journal of Finance,* 1993, Vol. 48, No. 5, pp. 1779–1801.
〔66〕 Goldman, E., J. Nam and J. Wang, “Asymmetric Adjustment of Realized Volatility,” 2005, Working paper.
〔67〕 Goyal, A., “Predictability of Stock Return Volatility from GARCH Models,” 2000, Working paper.
〔68〕 Grané, A. and H. Veiga, “The Effect of Realized Volatility on Stock Returns Risk Estimates,” 2007, Working paper.
〔69〕 Granger, C. W. J., “Long Memory Relationships and the Aggregation of Dynamic Models,” *Journal of Econometrics,* 1980, Vol. 14, pp. 227–238.
〔70〕 Granger, C. W. J. and R. Joyeux, “An Introduction to Long Memory Time Series Models and Fractional Differencing,” *Journal of Time Series Analysis,* 1980, Vol. 1, pp. 15–39.
〔71〕 Granger, C. W. J. and R. Ramanathan, “Improved Methods of Combining Forecasting,” *Journal of Forecasting,* 2006, Vol. 3, No. 2, pp. 197–204.
〔72〕 Hansen, P. R. and A. Lunde, “A Forecast Comparison of Volatility Models: Does Anything Beat a GARCH (1, 1) ?,” *Journal of Applied Econometrics,* 2005, Vol. 20, No. 7, pp. 873–889.
〔73〕 Harvey, A., E. Ruiz and N. Shephard, “Multivariate Stochastic Variance Models,” *Review of Economic Studies,* 1994, Vol. 61, No. 2, pp. 247–264.
〔74〕 He, C. and T. Teräsvirta, “Higher-Order Dependence in the General Power ARCH Process and a Special

Case," Working Paper, 1999, Department of Economic Statistics Stockholm School of Economics Box 6501, SE-113 83 Stockholm, Sweden.
〔75〕 Higgins, M. L. and A. K. Bera, "A Class of Nonlinear ARCH Models," *International Economic Review,* 1992, Vol. 33, pp. 137–158.
〔76〕 Hosking, J. R. M., "Fractional Differencing," *Biometrika,* 1981, Vol. 68, pp. 165–176.
〔77〕 Illueca, M. and Á. Lafuente, "New Evidence on Expiration-Day Effects Using Realized Volatility: An Intraday Analysis for the Spanish Stock Exchange," 2006, Working paper.
〔78〕 Janacek, G., "Determining the Degree of Differencing for Time Series via the Long Spectrum," *Journal of Time Series Analysis,* 1963, Vol. 3, No. 3, pp. 177–183.
〔79〕 Karanasos, M. and J. Kim, "A Re-examination of the Asymmetric Power ARCH Model," *Journal of Empirical Finance,* 2006, Vol. 13, No. 1, pp. 113–128.
〔80〕 Koopman, S. J., B. Jungbacker and E. Hol, "Forecasting Daily Variability of the S & P 100 Stock Index Using Historical, Realized and Implied Volatility Measurements," *Journal of Empirical Finance,* 2005, Vol. 12, No. 3, pp. 445–475.
〔81〕 Kruse, R., "Can Realized Volatility Improve the Accuracy of Value-at-Risk Forecast?," 2006, Working paper.
〔82〕 Lambert, P. and S. Laurent, "Modelling Skewness Dynamics in Series of Financial Data Using Skewed Location-Scale Distributions," 2002, Working paper.
〔83〕 Lanne, M., "Forecasting Realized Volatility by Decomposition," 2006, ECO Working paper.
〔84〕 Laurent, S., Estimating and Forecasting ARCH Models Using G@RCH™ 6, 2009, Timberlake Consultants in 2001, London.
〔85〕 Laurent, S., J. V. K. Rombous, A. Silvennoisen and F. Violante, "Comparing and Ranking Covariance Structure of M-GARCH Volatility Models," 2006, Working Paper.
〔86〕 Marquering, W. and M. Verbeek, "A Multivariate Nonparametric Test fot Return and Volatility Timing," *Finance Research Letters,* 2004, Vol. 1, pp. 250–260.
〔87〕 Martens, M., "Forecasting Daily Exchange Rate Volatility Using Intraday Returns," *Journal of International Money and Finance,* 2001, Vol. 20, No. 1, pp. 1–23.
〔88〕 Martens, M. and J. Zein, "Predicting Financial Volatility: High-Frequency Time-Series Forecasts Vis-à-vis Implied Volatility," *Journal of Futures Markets,* 2004, Vol. 24, No. 11, pp. 1005–1028.
〔89〕 McAleer, M., "Automated Inference and Learning in Modeling Financial Volatility," *Econometric Theory,* 2005, Vol. 21, pp. 232–261.
〔90〕 Nelson, D. B., "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," *Econometrica,* 1991, Vol. 59, pp. 347–370.
〔91〕 Pagel, I. M., P. J. de Jongh and J. H. Venter, "An Introduction to Realized Volatility," *Investment Analysts Journal,* 2007, No. 65, pp. 47–57.
〔92〕 Palma, W., "GARCH Models of Volatility," in Maddala, G. and C. Rao, *Handbook of Statistics,* ed., 1996, pp. 209–240, Elsevier Science, Amsterdam.
〔93〕 Pandey, A., "Modeling and Forecasting Volatility in Indian Capital Markets," 2003, Working paper.
〔94〕 Pentula, S. G., "Modeling the Persistence of Conditional Variances: A Comment," *Econometric Reviews,* 1986, Vol. 5, pp. 71–74.
〔95〕 Schwert, G. W., "Why Does Stock Market Volatility Change over Time," *Journal of Finance,* 1989, Vol. 44, No. 5, pp. 1115–1153.
〔96〕 ————, "Stock Volatility and the Crash of '87," *Review of Financial Studies,* 1990, Vol. 3, pp. 77–102.
〔97〕 Shu, J. H. and J. E. Zhang, "Testing Range Estimators of Historical Volatility," *Journal of Futures Markets,* 2006, Vol. 26, No. 3, pp. 297–313.
〔98〕 Sowell, F, "Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally Integrated Times Series

Models," *Journal of Econometrics,* 1992, Vol. 53, pp. 165–168.

〔99〕 Souza, L. R., "Why Aggregate Long Memory Time Series?," *Econometric Reviews,* 2008, Vol. 27, No. 1–3, pp. 298–316.

〔100〕 Tauchen, G. and H. Zhou, "Realized Jumps on Financial Markets and Predicting Credit Spreads," Finance and Economics Discussion Series, Divisions of Research & Statistics and Monetary Affairs, Federal Reserve Board, Washington, D.C., 2006, Working paper.

〔101〕 Taylor, S. J., *Modelling Financial Time Series,* World Scientific Pub Co Inc; 2nd Revised ed., 2008, J. Wiley & Sons, New York，新日本証券・新日本証券調査センター邦訳『金融先物・オプションの価格変動分析――ボラティリティの予測モデル』，東洋経済新報社，1988.

〔102〕 Tse, Y. K., "The Conditional Heteroskedasticity of the Yen-Dollar Exchange Rate," *Journal of Applied Econometrics,* 1998, Vol. 13, No. 1, pp. 49–55.

〔103〕 Yang, D. and Q. Zhang, "Drift-Independent Volatility Estimation Based on High, Low, Open, and losing Prices," *Journal of Business,* 2000, Vol. 73, No. 3, pp. 477–491.

〔104〕 Zakoian, J. M., "Threshold Heteroskedastic Models," *Journal of Economic Dynamics and Control,* 1994, Vol. 18, pp. 931–955.

〔105〕 Zhang, L., "Efficient Estimation of Stochastic Volatility Using Noisy Observations: A Multi-Scale Approach," *Bernoulli,* 2006, Vol. 12, No. 6, pp. 1019–1043.

〔106〕 Zhang, L., P. A. Mykland and Y. Aït-Sahalia, "A Tale of Two Time Scale: Determining Integrated Volatility with Noisy High-Frequency Data," *Journal of American Statistical Association,* 2005, Vol. 100, No. 472, pp. 1394–1411.