〔研究ノート〕

最適効用水準 u^* と最適価格体系 p^* の選択

石 原 健 一

はじめに

前稿[1]で，Theil の物価指数算式——log-change 型指数を採りあげたが，この指数は情報理論を援用した多分に形式的な指数算式であった。そして，形式論的物価指数といえども経済理論的接近が可能であるということから，理論生計費指数(1)，理論数量指数(2)

$$I_P(p_t,\ p_{t-1},\ u)=\frac{m(p_t,\ u)}{m(p_{t-1},\ u)} \tag{1}$$

$$I_Q(u_t,\ u_{t-1},\ p)=\frac{m(u_t,\ p)}{m(u_{t-1},\ p)} \tag{2}$$

は，効用関数が相似拡大的効用関数 Cobb-Douglas 型

$$U=\prod_{i=1}^{n} q_i^{w_i}, \qquad \sum_{i=1}^{n} w_i=1 \tag{3}$$

であるとき，

$$I_P(p_t,\ p_{t-1})=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_{it}}{p_{i,t-1}}\right)^{w_i} \tag{4}$$

$$I_Q(u_t,\ u_{t-1})=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{q_{it}}{q_{i,t-1}}\right)^{w_i} \tag{5}$$

となり，それぞれ効用水準 u，価格体系 p から独立となることを示した。さらに，(4)，(5)式の両辺の対数をとれば，log-change 型指数となることがわかっている。

しかし，前稿で明らかにしたのは理論生計費指数（理論数量指数）が内包する問題点[2)]

(i) 効用関数 $u=u(p, m)$ が定式化されなければならない

(ii) (1)式は選択される効用水準 u に依存している（同様に，(2)式は価格体系 p に依存している）

を解決する方法

(i)については，

① 効用関数を特定化する

② 効用関数の特定化を避け，効用関数の範囲を定め，(1)式のとりうる範囲を限定する

(ii)については，

③ 効用関数が相似拡大的（homothetic）である

④ 何らかの規準を設け，最適効用水準 u を決定する

のうち，①と③についてであり，②と④については検討されなかった。そこで，本稿では，解決策④について，とくに Theil〔29〕，〔30〕を中心に検討していくことにする。

1. 理論指数の幾何学的解釈

本章では，(1)，(2)式の幾何学的解釈を試みる。図による理解を容易にするために，両式の両辺の対数をとり，価格と実質所得の比較を比率から差の式に変換する。これはまた，3章で真の指数の近似式が Theil 算式であることを示すための要請でもある。

$$\log I_P(p_t, p_{t-1}, u)=\log m(p_t, u)-\log m(p_{t-1}, u) \qquad (6)$$

$$\log I_Q(u_t,\ u_{t-1},\ p)=\log m(p,\ u_t)-\log m(p,\ u_{t-1}) \tag{7}$$

次に，$(n+1)$次元の対数の価格 - 所得空間を考えよう。しかし，問題を簡単にするため，財の数 n を2にして，3次元の対数の価格 - 所得空間を図示する。

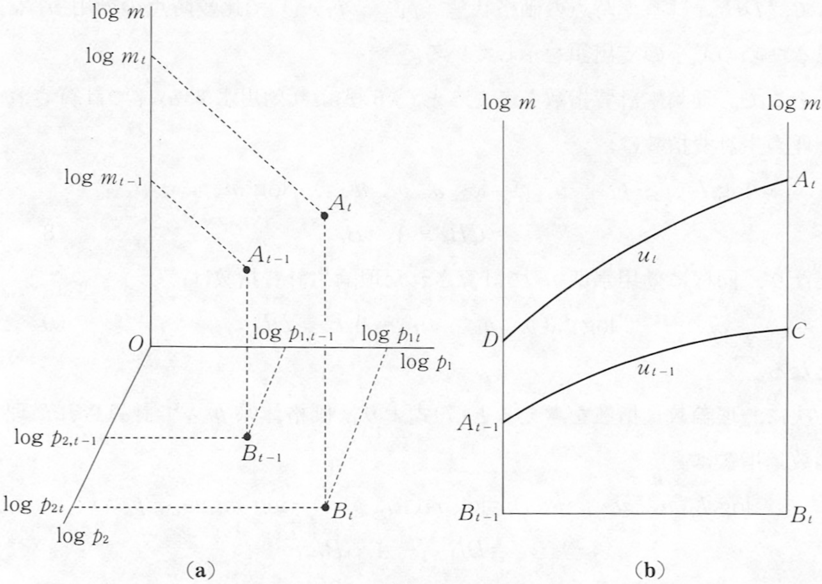

Fig. 1

Fig. 1-(a) において，A_t は t 時点の価格 - 所得状態を，A_{t-1} は$(t-1)$時点の価格 - 所得状態を示している。つまり，$A_t=(p_{1t},\ p_{2t},\ m_t)$，$A_{t-1}=(p_{1,t-1},\ p_{2,t-1},\ m_{t-1})$。したがって，$A_t$ と A_{t-1} に対して，それぞれの効用水準が定まるはずである。すなわち，A_t に対しては $u_t=u(m_t,\ p_t)$，A_{t-1} に対しては $u_{t-1}=u(m_{t-1},\ p_{t-1})$。

次に，**Fig. 1-(b)** は，**Fig. 1-(a)** の平面 $A_{t-1}B_{t-1}B_t A_t$ を抽出して，垂直軸をさらに延長したものである。したがって，垂直軸は所得 m を測定している。曲線 $A_{t-1}C$ は，t 時点と$(t-1)$時点の間のすべての時点に対して，そのときの価格体系で効用 u_{t-1} を得ることのできる最小の支出額の軌

跡を示している。したがって，CB_t は，比較時点の価格状態（p_{1t}，p_{2t}）で，基準時点の効用 u_{t-1} を得るための最小の支出額を示している。同様に，曲線 DA_t は t 時点と$(t-1)$時点の間のすべての時点に対してその時の価格状態で効用 u_t を得ることのできる最小の支出額の軌跡を示している。したがって，DB_{t-1} は基準時点の価格状態（$p_{1,t-1}$，$p_{2,t-1}$）で比較時点の効用 u_t を得るための最小の支出額を示している。

そこで，理論生計費指数を考えると，(6)式より効用水準 u_{t-1} で計算された理論生計費指数は，

$$\begin{aligned}\log I_P(p_t,\ p_{t-1},\ u_{t-1}) &= \log m(p_t,\ u_{t-1}) - \log m(p_{t-1},\ u_{t-1}) \\ &= CB_t - A_{t-1}B_{t-1} \qquad (8)\end{aligned}$$

となり，同様に効用水準 u_t で計算された理論生計費指数は，

$$\log I_P(p_t,\ p_{t-1},\ u_t) = A_tB_t - DB_{t-1} \qquad (9)$$

となる。

次に，理論数量指数を考えると(7)式より，価格体系 p_{t-1} で計算された理論数量指数は，

$$\begin{aligned}\log I_Q(u_t,\ u_{t-1},\ p_{t-1}) &= \log m(u_t,\ p_{t-1}) - \log m(u_{t-1},\ p_{t-1}) \\ &= DB_{t-1} - A_{t-1}B_{t-1} \\ &= DA_{t-1} \qquad (10)\end{aligned}$$

となり，同様に価格体系 p_t で計算された理論数量指数は，

$$\log I_Q(u_t,\ u_{t-1},\ p_t) = A_tC \qquad (11)$$

である。

2. 最適効用水準 u^* と最適価格体系 p^* の選択

「はじめに」で述べたように，理論生計費指数 I_P と理論数量指数 I_Q は，それぞれ計算される効用水準 u と価格体系 p の異なる選択によって，その値も異なってしまう。そこで本章では，何らかの基準を設け，最適効用水準

u^* と最適価格体系 p^* を選択することにする。

まず，Theil は u と p が当然備えていなければならない，または備えていることが望ましい公理を5つ示して，その5つの公理より u^* と p^* とを決定する。

指数を理論生計費指数と理論数量指数のペアで考えるとき，それらは同一性をもっていなければならない。たとえば，理論数量指数を計算するのに t 時点の価格体系 p_t を用いれば，理論生計費指数を計算するのに用いる効用水準も t 時点の水準 $u_t=u(m_t, p_t)$ でなければならない。したがって，最初の公理は，

公理 1.

理論生計費指数を計算するときの効用水準 $u=u(m, p)$ の変数 p と，理論数量指数を計算するときの価格体系 p は同一であるべきである[3)]。

そして，比較される時点の価格体系は p_{t-1} と p_t，同様に所得は m_{t-1} と m_t である。だから，理論生計費指数が計算される最適効用水準 $u_t^*=u(m_t^*, p_t^*)$ の変数 m_t^* と p_t^*，そして理論数量指数が計算される価格体系 p_t^* は，それぞれ m_t^* が m_{t-1} と m_t の関数，p_t^* が p_{t-1} と p_t の関数でなければならない。したがって，第2の公理は，

公理 2.

$$m_t^*=f(m_{t-1},\ m_t)\ ,\quad p_{it}^*=f(p_{i,t-1},\ p_{it})$$
$$（ただし，m>0,\ p>0）$$

それ故，理論生計費指数が計算される最適効用水準 u_t^* は，

$$u_t^*=u(f(m_{t-1},\ m_t),\ f(p_{1,t-1},\ p_{1t}),\ \cdots,\ f(p_{n,t-1},\ p_{nt})) \tag{12}$$

理論数量指数が計算される価格体系 p_t^* は，

$$p_t^*=(f(p_{1,t-1},\ p_{1t}),\ \cdots,\ f(p_{n,t-1},\ p_{nt})) \tag{13}$$

となる。

そして，関数 $f(\quad)$ は，2 変数の間の値をとるべきであるから，第 3 の公理は，

公理 3.

$$f(x,\ x)\equiv x\ , \qquad x>0 \tag{14}$$[4]

となる。ここで，x は，m_{t-1}，m_t，$p_{i,t-1}$，p_{it} のいずれかである。

次に，2 時点の比較を行うのであるから，両時点の所得と価格を平等に反映しなければならない。つまり，両時点を対称的に取り扱わねばならない。そこで，第 4 の公理は[5]，

公理 4.

$$f(x,\ y)\equiv f(y,\ x)\ , \qquad x,\ y>0$$

ここで，x が $(t-1)$ 時点の変数（m_{t-1}，または p_{t-1}）のときは y が t 時点の変数（m_t，または p_t），x が t 時点の変数のときは y が $(t-1)$ 時点の変数である。

最後に，いま，

$$u_t{}^*=u(f(m_{t-1},\ m_t),\ f(p_{1,t-1},\ p_{1t}),\ \cdots,\ f(p_{n,t-1},\ p_{nt}))$$

が決定されていると仮定する。このとき，基準時と比較時の効用水準は，それぞれ

$$u_{t-1}=u(m_{t-1},\ p_{1,t-1},\ \cdots,\ p_{n,t-1})$$
$$u_t=u(m_t,\ p_{1t},\ \cdots,\ p_{nt})$$

となる。次に，基準時におけるすべての価格と所得は変化しないで，比較時において，すべての価格と所得が c 倍（c は正の定数）になったとしよう。そのとき，比較時の効用水準 u_t は変化しない[6]。すなわち，

$$\begin{aligned} u_t &= u(m_t,\ p_{1t},\ \cdots,\ p_{nt}) \\ &= u(cm_t,\ cp_{1t},\ \cdots,\ cp_{nt}) \end{aligned}$$

したがって，$u_t{}^*$ もこのとき変化してはならない。すなわち，

$$u_t{}^* = u(f(m_{t-1},\ m_t),\ f(p_{1,t-1},\ p_{1t}),\ \cdots,\ f(p_{n,t-1},\ p_{nt}))$$
$$= u(f(m_{t-1},\ cm_t),\ f(p_{1,t-1},\ cp_{1t}),\ \cdots,\ f(p_{n,t-1},\ cp_{nt}))$$

が成立しなければならない。上式が成立するためには，次式が成り立たねばならない。

$$\begin{cases} f(m_{t-1},\ cm_t) = F(c) f(m_{t-1},\ m_t) \\ f(p_{1,t-1},\ cp_{1t}) = F(c) f(p_{1,t-1},\ p_{1t}) \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ f(p_{n,t-1},\ cp_{nt}) = F(c) f(p_{n,t-1},\ p_{nt}) \end{cases}$$

したがって，第５の公理は[7]，

公理 5.

$$f(x,\ cy) \equiv F(c) f(x,\ y), \qquad c,\ x,\ y > 0 \tag{15}$$

ここで，x, y は m または p である。ただし，x と y で時点が異なる。また，c は比例定数である。

以上の５つの公理より，まず $F(c)$ の関数型を選択し，続いて $f(\ \ )$ の関数型を導き出すことにする。

いま，$(t-1)$時点と t 時点のそれぞれの時点における価格と所得の比例的変化を考える。

すると，（$c_1>0$, $c_2>0$ は比例定数）

$$\begin{aligned} f(c_1x,\ c_2y) &\equiv F(c_2) f(c_1x,\ y) && \text{（公理５より）} \\ &\equiv F(c_2) f(y,\ c_1x) && \text{（公理４より）} \\ &\equiv F(c_1)F(c_2) f(y,\ x) && \text{（公理５より）} \\ &\equiv F(c_1)F(c_2) f(x,\ y) && \text{（公理４より）} \end{aligned}$$

いま，$x=y$, $c_1=c_2=c$ の特別な場合を考えると，(15)[8]式より

$$f(cx,\ cx) \equiv \{F(c)\}^2 f(x,\ x)$$
$$cx \equiv \{F(c)\}^2 x \qquad \text{（公理３より）}$$
$$\therefore\ F(c) \equiv \sqrt{c} \qquad (\because\ c>0)$$

次に，$f(\ )$の関数型を導き出すために，$F(c)=\sqrt{c}$ を(15)式に代入する。すると

$$f(c_1x,\ c_2y)\equiv\sqrt{c_1c_2}\,f(x,\ y) \tag{16}$$[9]

この式を基にして$f(\ )$の関数型を見つけだす。そのために，以下の置き換えを行う。

$$X\equiv\log x,\quad Y\equiv\log y,\quad \alpha_i\equiv\log c_i\qquad (i=1,\ 2)$$

$$a\equiv\log A\qquad (a\text{ は定数})$$

$$G(X,\ Y)\equiv\log f(x,\ y)=\log f(e^X,\ e^Y)$$

(16)式の両辺の対数をとって，

$$\log f(c_1x,\ c_2y)\equiv\log\sqrt{c_1c_2}\,f(x,\ y) \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=\log f(e^{\log c_1x},\ e^{\log c_2y})\\&=\log f(e^{\log c_1+\log x},\ e^{\log c_2+\log y})\\&=\log f(e^{\alpha_1+X},\ e^{\alpha_2+Y})\\&=G(\alpha_1+X,\ \alpha_2+Y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{右辺}&=\log c_1^{\frac{1}{2}}+\log c_2^{\frac{1}{2}}+\log f(x,\ y)\\&=\frac{1}{2}\log c_1+\frac{1}{2}\log c_2+\log f(x,\ y)\\&=\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2+G(X,\ Y)\end{aligned}$$

よって，

$$G(\alpha_1+X,\ \alpha_2+Y)\equiv\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2+G(X,\ Y)$$

$$\therefore\ G(X+\alpha_1,\ Y+\alpha_2)-G(X,\ Y)\equiv\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2 \tag{18}$$

(18)式より，関数$G(X,\ Y)$の傾きは$\frac{1}{2}$である[10]。

したがって，

$$G(X,\ Y)=\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}Y+a \tag{19}$$

と書ける。変数を元に戻すと，

$$\log f(x,\ y)=\frac{1}{2}\log x+\frac{1}{2}\log y+\log A$$

$$=\log A\sqrt{xy}$$

$$\therefore\ f(x,\ y)=A\sqrt{xy} \tag{20}$$

[11]

ここで，$f(x,\ x)$を考えると，(20)式より

$$f(x,\ x)=A\sqrt{xx}=Ax$$

他方，公理3により

$$f(x,\ x)=x$$

したがって，

$$Ax=x$$

$$\therefore\ A=1$$

以上のことから

$$f(x,\ y)=\sqrt{xy} \tag{21}$$

結局，前述の5つの公理を満足する関数$f(\quad)$は幾何平均であることがわかる。

したがって，(12)，(13)式より，理論生計費指数が計算される最適効用水準 $u_t{}^*$ と理論数量指数が計算される最適価格体系 $p_t{}^*$ は，次のようになる。

$$u_t{}^*=u(\sqrt{m_{t-1}m_t},\ \sqrt{p_{1,t-1}p_{1t}},\ \cdots,\ \sqrt{p_{n,t-1}p_{nt}}) \tag{22}$$

$$p_t{}^*=(\sqrt{p_{1,t-1}p_{1t}},\ \cdots,\ \sqrt{p_{n,t-1}p_{nt}}) \tag{23}$$

そして，理論生計費指数 I_P と理論数量指数 I_Q は，次式で表わされる。

$$I_P(p_t,\ p_{t-1},\ u_t{}^*)=\frac{m(p_t,\ u_t{}^*)}{m(p_{t-1},\ u_t{}^*)} \tag{24}$$

$$I_Q(u_t,\ u_{t-1},\ p_t{}^*)=\frac{m(p_t{}^*,\ u_t)}{m(p_t{}^*,\ u_{t-1})} \tag{25}$$

(24)，(25)式を Fig. 1-(b) と同じように図示するため，それらの両辺の（自然）対数をとると，

$$\log I_P(p_t,\ p_{t-1},\ u_t{}^*)=\log m(p_t,\ u_t{}^*)-\log m(p_{t-1},\ u_t{}^*) \tag{26}$$

$$\log I_Q(u_t,\ u_{t-1},\ p_t{}^*)=\log m(p_t{}^*,\ u_t)-\log m(p_t{}^*,\ u_{t-1}) \tag{27}$$

図の軸がすべて対数となるため，幾何平均価格 $p_{it}{}^*=\sqrt{p_{it}p_{i,t-1}}$ も対数をとると，

$$\log p_{it}{}^*=\frac{1}{2}(\log p_{i,t-1}+\log p_{it})$$

また同様に，幾何平均所得 $m_t{}^*=\sqrt{m_{t-1}m_t}$ も対数をとると

$$\log m_t{}^*=\frac{1}{2}(\log m_{t-1}+\log m_t) \tag{28}$$

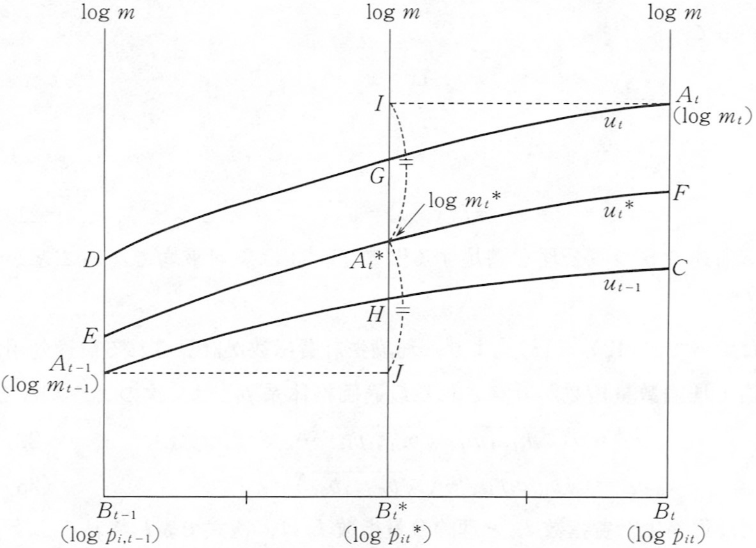

Fig. 2

したがって，図中の $\log p_{it}{}^*$ と $\log m_t{}^*$ の位置は，**Fig. 2** のようになり，最適効用水準 $u_t{}^*$ の位置も図のように定まる。ただし，$IA_t{}^*=A_t{}^*J$，$B_{t-1}B_t{}^*=B_t{}^*B_t$ である。そして，この図から，

$$\log I_P(p_t,\ p_{t-1},\ u_t{}^*)=FB_t-EB_{t-1} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\log I_Q(u_t,\ u_{t-1},\ p_t{}^*)&=GB_t{}^*-HB_t{}^*\\&=GH\end{aligned} \tag{30}$$

となる。

3. 理論生計費指数の近似式としての Theil 指数算式

2章で述べた真の指数のペア(24)式と(25)式は，実際には計算不可能である。したがって，実際に観察可能な2時点の価格と数量のデータによって数値が求められる「理論生計費指数の近似式」が必要となる。それ故，本章では，テーラー級数を用いて(24)式と(25)式から真の指数の近似式を求め，その式が，ウェイトが $\frac{1}{2}(w_{i,t-1}+w_{it})$ の log-change 型指数＝Theil 指数算式であることを示す。

まず，テーラー級数より近似式を求めるのに重要な役割を果たす補助定理を導き出す。もし，ある関数 $f(\ )$ の変数が a から a_0（$=a+\delta$）へ δ（$\fallingdotseq 0$）だけ微小に変化したとき，$f(a_0)$ はテーラー級数の公式によって次式のように書き表わせる[12)]。

$$f(a_0)=\frac{f(a)}{0!}+\frac{f'(a)}{1!}(a_0-a)+\frac{f''(a)}{2!}(a_0-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(a_0-a)^n \tag{31}$$

そして，1次導関数に(　)式を適用すると

$$f'(a_0)=f'(a)+(a_0-a)f''(a)+\frac{1}{2}(a_0-a)^2f'''(a)+\frac{1}{6}(a_0-a)^3f^{(4)}(a)+\cdots+\frac{1}{n!}(a_0-a)^nf^{(n+1)}(a)$$

$$\therefore\ f'(a)+(a_0-a)f''(a)=f'(a_0)-\frac{1}{2}(a_0-a)^2f'''(a)-\frac{1}{6}(a_0-a)^3f^{(4)}(a)-\cdots$$

$$-\frac{1}{n!}(a_0-a)^n f^{(n+1)}(a) \qquad (32)$$

次に，(31)式より

$$f(a_0)-f(a)=(a_0-a)f'(a)+\frac{1}{2}(a_0-a)^2 f''(a)+\frac{1}{6}(a_0-a)^3 f'''(a)+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}(a_0-a)f'(a)+\frac{1}{2}(a_0-a)\{f'(a)+(a_0-a)f''(a)\}$$

$$+\frac{1}{6}(a_0-a)^3 f^{(4)}(a)+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}(a_0-a)f'(a)+\frac{1}{2}(a_0-a)\Big\{f'(a_0)-\frac{1}{2}(a_0-a)^2 f''(a)$$

$$-\frac{1}{6}(a_0-a)^3 f^{(4)}(a)-\cdots\Big\}$$

$$+\frac{1}{6}(a_0-a)^3 f'''(a)+\cdots \qquad (\because \text{(32)式より})$$

$$=\frac{1}{2}(a_0-a)\{f'(a)+f'(a_0)\}-\frac{1}{4}(a_0-a)^3 f'''(a)$$

$$+\frac{1}{6}(a_0-a)^3 f'''(a)$$

$$-\frac{1}{12}(a_0-a)^4 f^{(4)}(a)-\cdots$$

$$=\frac{1}{2}(a_0-a)\{f'(a)+f'(a_0)\}-\frac{1}{12}(a_0-a)^3 f'''(a)$$

$$-\frac{1}{12}(a_0-a)^4 f^{(4)}(a)-\cdots$$

ここで，$(a_0-a)^3$ 以降の項をまとめて O_3 と置き換えると，補助定理は

$$f(a_0)-f(a)=\frac{1}{2}(a_0-a)\{f'(a)+f'(a_0)\}+O_3 \qquad (33)$$

となり，剰余項 O_3 は，a_0-a（$=\delta\fallingdotseq 0$）を3乗以上した項を加えたものであるから，無視してよいほど微小な値となる[13)]。この補助定理は，関数 $f(\ )$ の変数が a から a_0 に変化したとき，その関数の値の変化は，O_3 を無視すれば，変数の変化と2つの傾きの算術平均の内積に等しいことを意味する。

また，近似式を導出するときに必要であるもう一つの1次のテーラー級数式を示しておこう。(31)式において，$(a_0-a)^2$ 以降の項をまとめて O_2 とすると，1次のテーラー級数式は次式で表わせる。

$$f(a_0)=f(a)+(a_0-a)f'(a)+O_2 \tag{34}$$

この剰余項 O_2 は，a_0-a（$=\delta\fallingdotseq 0$）を2乗以上した項を加えたものであるから，O_3 よりは $(a_0-a)^2$ の項の分だけ大きいが，やはり無視してよいほど小さな値となる。

以上の概念を援用して，次に近似式の問題へと進んでいこう。**Fig. 3** において，線分 $A_t{}^*B_t{}^*$ の長さを考えると，

$$\begin{aligned}\overline{A_t{}^*B_t{}^*}&=\log m(u_t{}^*,\ p_t{}^*)\\&=\log m_t{}^*\\&=\log\sqrt{m_{t-1}m_t}\\&=\frac{1}{2}\log m_{t-1}+\frac{1}{2}\log m_t\\&=\log m_{t-1}+\frac{1}{2}(\log m_t-\log m_{t-1})\\&=\log m_{t-1}+\frac{1}{2}\log\frac{m_t}{m_{t-1}}\end{aligned} \tag{35}$$[14]

いま，消費者が点 $A_t{}^*$ から点 F へ移動する，言い換えれば価格体系が $p_t{}^*$ から p_t へ変化した場合を考える。このとき，効用水準 $u_t{}^*$ を維持するために増加させねばならない所得の対数は，($FB_t-A_t{}^*B_t{}^*$) である。この長さを l_1 とすると，l_1 は

$$l_1=\log m(u_t{}^*,\ p_t)-\log m(u_t{}^*,\ p_t{}^*) \tag{36}$$

となり，(35)式を代入すると

$$l_1=\log m(u_t{}^*,\ p_t)-\left(\log m_{t-1}+\frac{1}{2}\log\frac{m_t}{m_{t-1}}\right) \tag{37}$$

他方，$f(p_i)=\log m(u_t{}^*,\ p)$ という関数を考える。ここで，$u_t{}^*$ は一定で，$f(\ \ )$ の変数は p_i だけである。また，$f(\ \ )$ は，当然のことながら，

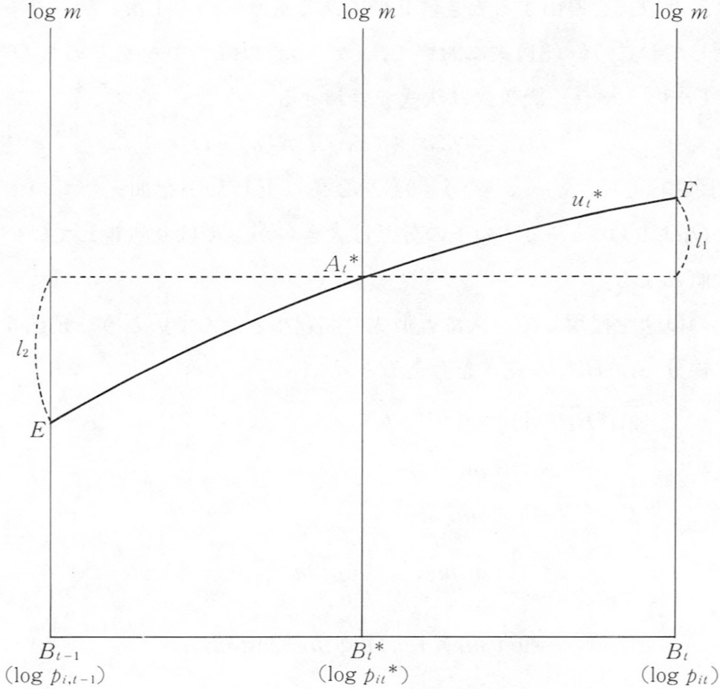

Fig. 3

$\log p_i$ の関数ともみなしうる。$A_t{}^*$ から F へ移動したとき，すべての価格は $p_{it}{}^*$ から p_{it}（すなわち，$\log p_{it}{}^*$ から $\log p_{it}$）へ変化する。すると，l_1 を補助定理(33)を用いて表わすことも可能である。すなわち，

$$
\begin{aligned}
l_1 &= f(p_{it}) - f(p_{it}{}^*) \\
&= f(\log p_{it}) - f(\log p_{it}{}^*) \\
&= \frac{1}{2}(\log p_{it} - \log p_{it}{}^*)\{f'(\log p_{it}) + f'(\log p_{it}{}^*)\} + O_3 \qquad (38)
\end{aligned}
$$

このとき，

$$\log p_{it} - \log p_{it}{}^* = \log p_{it} - \log(p_{it}p_{i,t-1})^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}(\log p_{it}-\log p_{i,t-1})$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{p_{it}}{p_{i,t-1}} \tag{39}$$

$$f'(\log p_i)=\frac{\partial \log m(u_t{}^*,\ p)}{\partial \log p_i}$$

$$=\frac{\partial m(u_t{}^*,\ p)}{m(u_t{}^*,\ p)}\bigg/\frac{\partial p_i}{p_i}$$

$$=\frac{\partial m(u_t{}^*,\ p)}{\partial p_i}\cdot\frac{p_i}{m(u_t{}^*,\ p)}$$

$$=\frac{\partial(\sum p_i q_i)}{\partial p_i}\cdot\frac{p_i}{m(u_t{}^*,\ p)}$$

$$=q_i(u_t{}^*,\ p)\cdot\frac{p_i}{m(u_t{}^*,\ p)}$$

$$=\frac{p_i q_i(u_t{}^*,\ p)}{\sum p_i q_i}$$

$$=w_i(u_t{}^*,\ p) \tag{40}$$

つまり，これは，価格体系が p，達成される効用水準が $u_t{}^*$ のときの第 i 財のウェイトである。これより，次式が成り立ち，上から順にそれぞれ，A_i，B_i，C_i と置く。

$$f'(\log p_{it})=\frac{\partial \log m(u_t{}^*,\ p_t)}{\partial \log p_i}=w_i(u_t{}^*,\ p_t)=A_i \tag{41}$$

$$f'(\log p_{it}{}^*)=\frac{\partial \log m(u_t{}^*,\ p_t{}^*)}{\partial \log p_i}=w_i(u_t{}^*,\ p_t{}^*)=B_i \tag{42}$$

$$f'(\log p_{i,t-1})=\frac{\partial \log m(u_t{}^*,\ p_{t-1})}{\partial \log p_i}=w_i(u_t{}^*,\ p_{t-1})=C_i \tag{43}$$

つまり，A_i，B_i，C_i は，達成される効用水準が $u_t{}^*$，価格体系がそれぞれ p_t，$p_t{}^*$，p_{t-1} のときの第 i 財のウェイトである。これらを(38)式に代入すると，

$$l_1=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i+B_i}{2}\cdot\frac{1}{2}\log\frac{p_{it}}{p_{i,t-1}}+O_3$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i+B_i}{4}\cdot\log\frac{p_{it}}{p_{i,t-1}}+O_3 \tag{44}$$

(37)式と(44)式より

$$\log m(u_t{}^*,\ p_t)-\left(\log m_{t-1}+\frac{1}{2}\log\frac{m_t}{m_{t-1}}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i+B_i}{4}\cdot\log\frac{p_{it}}{p_{i,t-1}}+O_3$$

$$\therefore\ \log m(u_t{}^*,\ p_t)=\log m_{t-1}+\frac{1}{2}\log\frac{m_t}{m_{t-1}}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i+B_i}{4}\cdot\log\frac{p_{it}}{p_{i,t-1}}+O_3 \tag{45}$$ [15]

次に，消費者が点 $A_t{}^*$ から点 E へ移動する場合を考える。そのとき，効用水準 $u_t{}^*$ を維持するために減少させねばならない所得の対数は，$(A_t{}^*B_t{}^*-EB_{t-1})$ である。これを l_2 とすると，同様にして[16]，

$$l_2=\left(\log m_{t-1}+\frac{1}{2}\log\frac{m_t}{m_{t-1}}\right)-\log m(u_t{}^*,\ p_{t-1}) \tag{46}$$

また，補助定理より，

$$l_2=\sum_{i=1}^{n}\frac{B_i+C_i}{4}\cdot\log\frac{p_{it}}{p_{i,t-1}}+O_3 \tag{47}$$

したがって，

$$\log m(u_t{}^*,\ p_{t-1})=\log m_{t-1}+\frac{1}{2}\log\frac{m_t}{m_{t-1}}$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{B_i+C_i}{4}\cdot\log\frac{p_{it}}{p_{i,t-1}}-O_3 \tag{48}$$

そして，(45)式から(48)式を引くことによって，(43)式によって与えられている理論生計費指数の対数をとった式の右辺を得ることができる。すなわち，

$$\log m(u_t{}^*,\ p_t)-\log m(u_t{}^*,\ p_{t-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i+B_i}{4}\cdot\log\frac{p_{it}}{p_{i,t-1}}+\sum_{i=1}^{n}\frac{B_i+C_i}{4}\cdot\log\frac{p_{it}}{p_{i,t-1}}+O_3$$ [18]

$$\therefore\ \log I_P(p_t,\ p_{t-1},\ u_t^*)=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i+2B_i+C_i}{4}\cdot\log\frac{p_{it}}{p_{i,t-1}}+O_3 \quad (49)$$

次に，(34)式の１次のテーラー級数式を使って，$(A_i+2B_i+C_i)$ について考察する。いま，関数 $g(p_i)=w_i(u_t^*,\ p)$ について考えると，この関数は，達成される効用水準が u_t^* のときに，価格体系 p の変化とともに第 i 財のウェイトがどのように変化するかを表わしている。ここで，価格体系が，p_t^* から p_t へと変化すると，(34)式より

$$g(\log p_{it})=g(\log p_{it}^*)+(\log p_{it}-\log p_{it}^*)g'(\log p_{it}^*)+O_2 \quad (50)$$

また，$g(\log p_i)=w_i(u_t^*,\ p)=f'(\log p_i)$ と，(39)，(41)～(43)式より，

$$A_i=B_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w_i(u_t^*,\ p_t^*)}{\partial\log p_i}\cdot\frac{1}{2}\log\frac{p_{it}}{p_{i,t-1}}+O_2 \quad (51)$$

同様に，価格体系が p_t^* から p_{t-1} に変化したとき，

$$C_i=B_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w_i(u_t^*,\ p_t^*)}{\partial\log p_i}\cdot\frac{1}{2}\log\frac{p_{it}}{p_{i,t-1}}+O_2 \quad (52)$$

(51)式と(52)式を加えると，

$$A_i+C_i=2B_i+O_2 \quad (53)$$

となり，(41)，(43)式より，$A_i=w_i(u_t^*,\ p_t)$ は t 時点のウェイト，$C_i=w_i(u_t^*,\ p_{t-1})$ は $(t-1)$時点のウェイトを意味している。よって，(53)式から

$$w_{it}+w_{i,t-1}=2B_i+O_2 \quad (54)$$

他方，(53)式の両辺に $2B_i$ を加え，O_2 を無視し，(54)式を適用すれば，

$$\begin{aligned}A_i+2B_i+C_i&=4B_i+O_2\\&\fallingdotseq 4B_i\\&=2(w_{it}+w_{i,t-1})\end{aligned} \quad (55)$$

この(55)式を(49)式に代入して，O_3 を無視すれば，

$$\log I_P(p_t,\ p_{t-1},\ u_t^*)\fallingdotseq\sum_{i=1}^{n}\frac{w_{it}+w_{i,t-1}}{2}\cdot\log\frac{p_{it}}{p_{i,t-1}} \quad (56)$$

となり，右辺は Theil の物価指数である。よって，効用水準 u_t^* で計算さ

れた理論生計費指数の近似式は，Theil 物価指数算式である。

以上と同様の手続きにより，次式も成立する。

$$\log I_Q(u_t,\ u_{t-1},\ p_t{}^*) \fallingdotseq \sum_{i=1}^{n} \frac{w_{it}+w_{i,t-1}}{2} \cdot \log \frac{q_{i,t-1}}{q_{it}} \qquad (57)$$

これは，価格体系 $p_t{}^*$ で計算された理論数量指数の近似式は，Theil 数量指数算式であることを示している。

おわりに

前稿，そして本稿で検討したように Theil 指数のように原子論的接近方法によって導出された指数といえども，その指数のもつ経済的意味には重要なものがあるといえる。とくに，本稿では，理論生計費指数が効用水準から独立となるために必要であった最適効用水準（理論数量指数については，最適価格体系）を決定する問題についてふれた。

そして，計算可能とするために，理論指数の近似式を求めたが，その近似式(56)は，$\log \dfrac{p_{it}}{p_{i,t-1}}$ の値が小さければ小さいほど，よって期間が短ければ短いほど，近似の精度はよくなるといえる。このことから当然，連鎖指数ということも考えられるが，log-change 型連鎖指数は，

$$I_{P_t} = I_{P_0} \Pi \left(\Pi \frac{p_{it}}{p_{i,t-1}} \right)^{\bar{w}_{it}}$$

ただし，$\bar{w}_{it} = \dfrac{1}{2}(w_{i,t-1}+w_{it})$ と表わされる。これは，現在最高の指数といわれている Divisia 指数

$$I_{P_t} = I_{P_0} \exp \left\{ \int_0^t \sum w_{it} \left(\frac{\dot{p}_{it}}{p_{it}} \right) dt \right\}$$

の離散型近似でもある。

〔注〕

1）石原〔14〕.

2）石原〔14〕, p. 228.

3） Theil〔30〕, p. 682.

4） Theil〔30〕, p. 683.

5） Theil〔30〕, p. 683.

6） たとえば，ある時点で，貨幣の単位が100倍になったとする。このとき，所得も，すべての価格も100倍になるが，効用は変化しない。

7） Theil〔30〕, p. 684.

8） Theil〔30〕, p. 684.

9） Theil〔30〕, p. 684.

10） $G(X+\alpha_1,\ Y+\alpha_2)-G(X,\ Y)=\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2$

これは，X が α_1 増えると $G(\ \ )$ は $\frac{1}{2}\alpha_1$ 増加して，Y が α_2 増えると $G(\ \ )$ は $\frac{1}{2}\alpha_2$ 増加することを示している。したがって，X が1増えると，$G(\ \ )$ は $\frac{1}{2}$ 増加し，Y も1増えると $G(\ \ )$ は $\frac{1}{2}$ 増加するので，$G(\ \ )$ の傾きは，X に対しても Y に対しても，$\frac{1}{2}$ である。

11） Theil〔30〕, p. 685.

12） A. C. チャン『現代経済学の数学基礎』（上）・（下），大住栄治・小田正雄・高森寛・堀江義訳，マグロウヒル好学社，p. 299 参照。

13） Theil〔29〕, p. 685 で，Theil は O_3, O_2 を無視できると考えている。

14） Theil〔30〕, p. 686.

15） Theil〔30〕, p. 686.

16） $l_2=\log m(u_t^*,\ p_t^*)-\log m(u_t^*,\ p_{t-1})$

$$=\left(\log m_{t-1}+\frac{1}{2}\log\frac{mt}{m_{t-1}}\right)-\log m(u_t^*,\ p_{t-1})\qquad (\because\ (35)\text{より})$$

また，一方

$$l_2=f(p_{it}^*)-f(p_{i,t-1})$$
$$=f(\log p_{it}^*)-f(\log p_{i,t-1})$$
$$=\frac{1}{2}(\log p_{it}^*-\log p_{i,t-1})\{f'(\log p_{it}^*)+f'(\log p_{i,t-1})\}+O_3\qquad (\because\ (33)\text{より})$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\log p_{it}+\frac{1}{2}\log p_{i,t-1}-\log p_{i,t-1}\right)\times(B_i+C_i)+O_3\qquad (\because\ (42)(43)\text{より})$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\log\frac{p_{it}}{p_{i,t-1}}\right)(B_i+C_i)+O_3$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{B_i+C_i}{4}\log\frac{p_{it}}{p_{i,t-1}}+O_3$$

$$\therefore\ \log m(u_t^*,\ p_{t-1})=\left(\log m_{t-1}+\frac{1}{2}\log\frac{m_t}{m_{t-1}}\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{B_i+C_i}{4}\cdot\log\frac{p_{it}}{p_{i,t-1}}-O_3\qquad(48)$$

17） Theil〔30〕, p. 687.

18） 3次の剰余項はすべて O_3 で表わされる。

〔参考文献〕

〔1〕 Abramson, N. (1963), *Information Theory and Coding,* New York: McGraw-Hill（ノーマン・アブラムソン『情報理論入門』宮川洋訳，好学社，1969).

〔2〕 Allen, R. C. and W. E. Diewert (1981), "Direct versus Implicit Superlative Index Number Formulae," *The Review of Economics and Statistics,* Vol. 63, No. 3, August, pp. 430-5.

〔3〕 Caves, D. W., Christensen, L. R., and W. E. Diewert (1982), "Multilateral Comparisons of Output, Input, and Productivity Using Superlative Index Numbers," *The Economic Journal,* Vol. 92, No. 365, March, pp. 73-86.

〔4〕 Chetty, B. K. (1971), "On the Construction of Cost of Living and Productivity Indices," *International Economic Review,* Vol. 12, No. 1, February, pp. 144-6.

〔5〕 Christensen, L. R., Jorgenson, D. W., and L. J. Lau (1971), "Conjugate Duality and the Transcendental Logarithmic Function," *Econometrica,* Vol. 39, No. 4, July, pp. 255-6.

〔6〕 Christensen, L. R., Jorgenson, D. W., and L. J. Lau (1973), "Transcendental Logarithmic Production Frontiers," *The Review of Economics and Statistics,* Vol. 55, February, pp. 28-45.

〔7〕 Diewert, W. E. (1975), "Exact and Superlative Index Numbers," *Journal of Econometrics,* 4, May, pp. 115-45.

〔8〕 Diewert, W. E. (1983), "The Economic Theory of Index Numbers: Survey," *Essays in the Theory and Measurement of Consumer Behavior in Honour of Sir Richard Stone,* Edited by Angus Deaton, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.

〔9〕 Eichhorn, W. (1976), "Fisher's Tests Revisted," *Econometrica,* Vol. 44, No. 2, March, pp. 247-56.

〔10〕 Eichhorn, W. (1978), Functional Equations in Economics. Reading. Mass: Addison-Wesley.

〔11〕 Eichhorn, W. and J. Voeller, *Theory of the Price Index* (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 140), Berlin.

〔12〕 Fisher, I. (1922), *The Making of Index Numbers,* Cambridge.

〔13〕 Frisch, R. (1930), "Necessary and Sufficient Conditions Regarding the

Form of an Index Number Which Shall Meet Certain of Fisher's Test" *Journal of the American Statistical Association,* 25, December, pp. 397-406.

〔14〕 石原健一（1987),「H. Theil の物価指数理論」, 関西大学『経済論集』第 36 巻第 5 号, pp. 217-41.

〔15〕 Kloek, T. and H. Theil (1965), "International Comparisons of Price and Quantities Consumed," *Econometrica,* Vol. 33, No. 3, July, pp. 535-56.

〔16〕 Lau, L. J. (1979), "On Exact Index Numbers," *The Review of Economics and Statistics,* Vol. 61, February, pp. 73-82.

〔17〕 Lloyd, P. J. (1975), "Substitution Effect and Biases in Non-true Price Indices," *The American Economic Review,* Vol. 65, No. 3, June, pp. 301-13.

〔18〕 森田優三（1968),「物価指数論ノート (2)：Theil 指数について——指数理論と情報理論——」,『青山経済論集』第 20 巻第 4 号, pp. 103-16.

〔19〕 Phlips, L. (1974), *Applied Consumption Analysis,* Amsterdam: North-Holland.

〔20〕 Rajaoja, V. (1958), *A Study in the Theory of Demand Functions and Price Indexes.* Helsinki: Societas Scientiarum Fennica.

〔21〕 Samuelson, P. A. and S. Swamy (1974), "Invariant Economic Index Numbers and Canonical Duality: Survey and Synthesis," *The American Economic Review,* Vol. 64, No. 4, September, pp. 566-93.

〔22〕 Sato, K. (1974), "Ideal Index Numbers That Almost Satisfy the Factor Reversal Test," *The Review of Economics and Statistics,* Vol. 56, No. 4, November, pp. 549-52.

〔23〕 Sato, K. (1976), "Teh Meaning and Measurement of the Real Value Added Index," *The Review of Economics and Statistics,* Vol. 58, No. 2, May, pp. 434-42.

〔24〕 Sato, K. (1976), "The Ideal Log-change Index Number," *The Review of Economics and Statistics,* Vol. 58, No. 4, November, pp. 223-8.

〔25〕 Subramanian, S. (1934), "On a certain Conclusion of Frisch," *Journal of the American Statistical Association,* 29, September.

〔26〕 Swamy, S. (1965), "Consistency of Fisher's Test," *Econometrica,* Vol. 33, No. 3, July, pp. 619-23.

〔27〕 高木秀玄（1982),「Leo Törnqvist の新しい指数算式」, 関西大学『経済論集』第 32 巻第 4 号, pp. 441-61.

〔28〕 Theil, H. (1965), "The Information Approach to Demand Analysis," *Econometrica,* Vol. 33, No. 1, January, pp. 67-87.

〔29〕 Theil, H. (1967), *Economics and Information Theory,* Amsterdam: North-Holland.

〔30〕 Theil, H. (1968), "On the Geometry and the Numerical Approximation of Cost of Living and Real Income Indices," *De Economist,* 116, NR. 6, pp. 677-89.

〔31〕 Theil, H. (1970), "Value Share Transitions in Consumer Demand Theory," *Econometrica,* Vol. 38, No. 1, January, pp. 118-27.

〔32〕 Theil, H. (1973), "A New Index Number Formula," *The Review of Economics and Statistics,* Vol. 55, No. 4, November, pp. 498-502.

〔33〕 Theil, H. (1974), "More on Log-change Index Numbers," *The Review of Economics and Statistics,* Vol. 56, No. 4, November, pp. 552-4.

〔34〕 Tilanus, C. D. and H. Theil (1965), "The Information Approach to the Evaluation of Input-Output Forcasts," *Econometrica,* Vol. 32, No. 4, October, pp. 847-62.

〔35〕 Törnqvist, L. (1936), "The Bank of Finland's Consumption Price Index," *Bank of Finland Monthly Bulletin,* 10, pp. 27-34.

〔36〕 Vartia, Y. O. (1976), "Ideal Log-change Index Numbers," *Scandinavian Journal of Statistics,* 3, pp. 121-6.